

STUDI METODE ELEMEN HINGGA DENGAN INTERPOLASI GANDA

Handy Prayogo¹, Andreas Setiawan², and Wong Foek Tjong³

ABSTRAK : Metode elemen hingga telah mengalami banyak perkembangan dan para peneliti berusaha untuk mengeliminasi kelemahan-kelemahan yang dimiliki. Salah satu pengembangan dari metode elemen hingga adalah dengan melakukan 2 kali interpolasi yaitu interpolasi dengan *shape function* dari metode elemen hingga standar (FEM standar) dan interpolasi dengan *average nodal gradient* dan *nodal displacement* dari metode elemen hingga dengan interpolasi ganda (TFEM) sebagai *interpolation conditions* untuk menghasilkan *shape function* yang kontinu. Pada penelitian ini disajikan aplikasi TFEM dalam penyelesaian masalah *plane-strain* dan *axisymmetric* pada *benchmark problem*. Kekonvergenan TFEM akan dibandingkan dengan FEM standar yang dinilai dari *energy norm error* serta dilakukan pula pengujian terhadap *volumetric locking*. Penerapan TFEM dilakukan dengan bantuan pemrograman MATLAB. Hasil yang didapatkan menunjukkan bahwa dengan diperhalusnya *mesh*, TFEM dapat memberikan hasil yang makin mendekati eksak, menunjukkan sifat konvergen lebih daripada FEM standar. *Volumetric locking* diamati masih terjadi pada semua masalah yang diujikan. TFEM dapat disimpulkan memberikan performa lebih baik dibanding FEM standar.

KATA KUNCI: metode elemen hingga, interpolasi ganda, *shape function* kontinu, *plane-stress* dan *plane-strain*, *axisymmetric*, *volumetric locking*.

1. PENDAHULUAN

Metode elemen hingga (*finite element method*, FEM) merupakan metode numerikal yang paling banyak digunakan untuk mencari nilai aproksimasi dari solusi persamaan diferensial yang banyak ditemukan pada permasalahan di bidang teknik dan sains. Salah satu alasan dari kepopuleran metode elemen hingga karena metode ini dapat dengan mudah diaplikasikan dengan program komputer (Kim, 2015). Seperti yang telah diketahui, turunan disekeliling elemen untuk FEM standar adalah bersifat diskontinu dan diperlukan *smoothing operation*. Selain diperlukannya *smoothing operation*, FEM standar juga memiliki tingkat keakuratan yang rendah untuk elemen isoparametrik berorde linier dimana hasil sangat bergantung kepada proses *meshing* (Lee & Bathe, 1993). Kelemahan lain adalah *volumetric locking* sehingga tidak dapat diterapkan untuk analisis dengan *poisson's ratio* mendekati 0,5 (Cortis, Augarde, Coombs, & Charlton, 2018).

Untuk mengeliminasi kelemahan yang dimiliki oleh FEM standar, maka diperlukan pengembangan terhadap metode FEM standar. *Twice-interpolation finite element method* (TFEM) yang dikembangkan oleh Wu, Zheng, Tang, & Zhang (2010) dapat mengatasi kelemahan-kelemahan dari FEM standar karena interpolasi dibentuk melalui dua tahap. Interpolasi tahap pertama dari TFEM juga memiliki kesamaan dengan FEM standar. Perbedaan ada pada tahap kedua dimana dibutuhkan *average nodal gradient* dan *nodal displacement* sebagai *interpolation conditions*. TFEM memiliki akurasi yang lebih baik dan memiliki kecepatan konvergensi yang tinggi dibandingkan dengan FEM standar dan telah diuji pada kasus *plane stress* dan *plane stress*. Kelebihan lain adalah *nodal stresses* dan *strains* dapat dicari

¹ Mahasiswa Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra, m21415097@john.petra.ac.id

² Mahasiswa Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra, m21415115@john.petra.ac.id

³ Dosen Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra, wftjong@petra.ac.id

tanpa menggunakan *smoothing operation*. TFEM juga dapat digunakan untuk mensimulasikan *incompressible material* dengan *Poisson's ratio* mendekati 0,5.

2. METODE ELEMEN HINGGA DENGAN INTERPOLASI GANDA (TFEM)

TFEM merupakan metode elemen hingga yang memiliki *trial function* yang dikonstruksi dengan dua tahap interpolasi. Pada TFEM interpolasi numerikal tahap pertama sama persis dengan interpolasi yang dilakukan di FEM standar. Dengan perbedaan *nodal gradient* rata rata diperlukan untuk interpolasi tahap kedua. Kemudian fungsi aproksimasi dibentuk dari kondisi *nodal displacement* dan *nodal gradient* rata rata (Wu, Zheng, Tang, & Zhang, 2010).

2.1 Interpolasi Tahap Pertama

Fungsi aproksimasi pada interpolasi pertama dapat dilihat dalam Persamaan (1), (2), dan (3).

$$u(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = [u(\mathbf{x}_1) \quad u(\mathbf{x}_2) \quad \dots \quad u(\mathbf{x}_n)]^T \quad (2)$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = [N_1(\mathbf{x}) \quad N_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad N_n(\mathbf{x})] \quad (3)$$

Dimana: \mathbf{x} adalah koordinat dari poin yang sedang diamati yaitu $[x, y]^T$, n adalah jumlah seluruh *node* yang ada, \mathbf{u} adalah vektor dari perpindahan pada *node* elemen, dan \mathbf{N} adalah vektor dari *shape function*. Pada FEM standar n merupakan jumlah *node* pada elemen tersebut, sedangkan pada TFEM n merupakan jumlah *node* pada elemen tersebut dan *node* pada elemen elemen sekitarnya (*supporting nodes*).

Pada FEM standar, *nodal derivatives* pada elemen tersebut bersifat diskontinu. Sehingga pada TFEM harus dicari *nodal derivatives* pada elemen tersebut. *Nodal derivative* rata rata dapat dicari dengan Persamaan (4), (5), dan (6).

$$\bar{u}_{,x}^{[i]} = \bar{\mathbf{N}}_{,x}^{[i]}\mathbf{u} \quad (4)$$

$$\bar{u}_{,x}^{[i]} = \sum_{e \in Si} w_e \cdot u_{,x}^{[i][e]} = \sum_{e \in Si} (w_e \cdot \mathbf{N}_{,x}^{[i][e]}) \mathbf{u} \quad (5)$$

$$\bar{\mathbf{N}}_{,x}^{[i]} = \sum_{e \in Si} (w_e \cdot \mathbf{N}_{,x}^{[i][e]}) \quad (6)$$

Dimana: i adalah *node* koordinat lokal yang sedang ditinjau, $\bar{u}_{,x}^{[i]}$ adalah turunan rata rata dari $u^{[i]}$, $u^{[i]}$ adalah nilai aproksimasi di *node* i atau $u(\mathbf{x}_i)$, Si adalah kelompok elemen yang berhubungan dengan *node* i , w_e adalah *weight function* yang bergantung dengan tipe elemen, $\mathbf{N}_{,x}^{[i][e]}$ adalah turunan dari $N^{[i]}$ yang berada pada elemen e , dan $\bar{\mathbf{N}}_{,x}^{[i]}$ adalah rata rata turunan dari $N^{[i]}$ terhadap x . Untuk $\bar{\mathbf{N}}_{,y}^{[i]}$ dapat dicari dengan cara yang serupa.

2.2 Interpolasi Tahap Kedua

Pada FEM standar, dikontinuitas *nodal gradient* membuat dikontinuitas dalam *strain* dan *stress*. Jika interpolasi dilakukan pada *nodal values* dan *nodal gradient* maka akan didapatkan *nodal derivatives* yang bersifat kontinu (Wu, Zheng, Tang, & Zhang, 2010). Fungsi aproksimasi dari TFEM dapat dilihat dari Persamaan (7) dan (8).

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{N}} = \sum_{i=1}^n (\phi_i \mathbf{N}^{[i]} + \phi_{ix} \bar{\mathbf{N}}_{,x}^{[i]} + \phi_{iy} \bar{\mathbf{N}}_{,y}^{[i]}) \quad (8)$$

Dimana: $\phi_i, \phi_{ix}, \phi_{iy}$ adalah *field function* dari elemen tersebut, \hat{u} dan \hat{N} adalah fungsi aproksimasi yang didapat dari interpolasi ganda, $\mathbf{N}^{[i]}$ adalah *shape function* di *node i*, $\bar{\mathbf{N}}_{,x}^{[1]}$ dan $\bar{\mathbf{N}}_{,y}^{[1]}$ adalah turunan rata-rata *shape function* di *node i* yang didapat dari tahap pertama, dan n adalah jumlah *node* yang terdapat dalam elemen tersebut (untuk elemen segitiga n adalah 3).

3. APLIKASI TFEM PADA ELEMEN SEGITIGA

3.1 Interpolasi Tahap Pertama

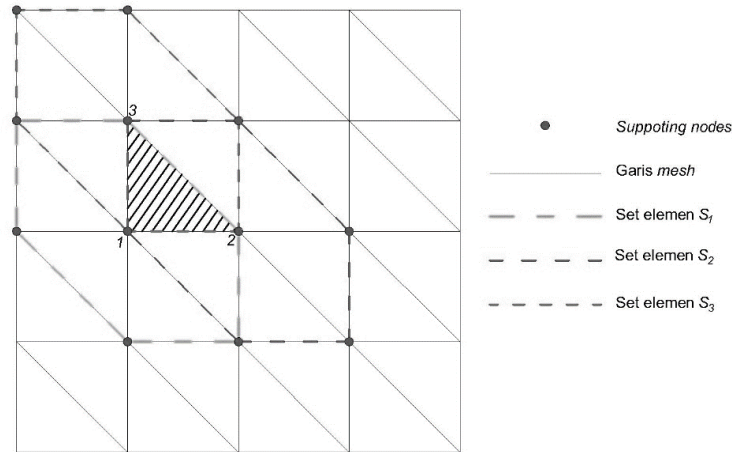
Pada TFEM tahap pertama yang dicari adalah *nodal derivative* rata-rata menggunakan Persamaan (9) dan (10).

$$\bar{\mathbf{N}}_{,x}^{[1]} = \sum_{e \in S_1} (w_e \cdot \mathbf{N}_{,x}^{[1][e]}) \quad (9)$$

$$w_e = \frac{\Delta_e}{\sum_{e \in S_1} \Delta_e}, e \in S_1 \quad (10)$$

Pada **Gambar 1** dapat dilihat bahwa $S_1, S_2,$ dan S_3 merupakan kelompok elemen yang berdekatan dengan masing-masing *node 1, 2,* dan 3 . *Supporting nodes* itu terdiri dari seluruh *node* yang berada didalam elemen set $S_1, S_2,$ dan S_3 . Sehingga *nodal derivative* rata-rata untuk *node l* dapat dicari dengan menggunakan Persamaan (11).

$$\bar{N}_{l,x}^{[1]} = \sum_{e \in S_l} (w_e \cdot N_{l,x}^{[1][e]}) \quad (11)$$



Gambar 1. Ilustrasi Elemen Segitiga Dua Dimensi pada TFEM

3.2 Interpolasi Tahap Kedua

Pada interpolasi tahap kedua, nilai interpolasi pada titik \mathbf{x} dapat diperoleh dari Persamaan (12).

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \phi_i u^{[1]} + \phi_{ix} \bar{u}_{,x}^{[1]} + \phi_{iy} \bar{u}_{,y}^{[1]} + \phi_j u^{[2]} + \phi_{jx} \bar{u}_{,x}^{[2]} + \phi_{jy} \bar{u}_{,y}^{[2]} + \phi_k u^{[3]} + \phi_{kx} \bar{u}_{,x}^{[3]} + \phi_{ky} \bar{u}_{,y}^{[3]} \quad (12)$$

Dimana $\phi_i, \phi_{ix}, \phi_{iy}$ harus memenuhi Persamaan (13), (14), (15), dan (16).

$$\phi_i(x_l) = \delta_{il}, \phi_{i,x}(x_l) = 0, \phi_{i,y}(x_l) = 0, \quad (13)$$

$$\phi_{ix}(x_l) = 0, \phi_{ix,x}(x_l) = \delta_{il}, \phi_{ix,y}(x_l) = 0, \quad (14)$$

$$\phi_{iy}(x_l) = 0, \phi_{iy,x}(x_l) = 0, \phi_{iy,y}(x_l) = \delta_{il}, \quad (15)$$

$$\delta_{il} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = l \\ 0, & \text{jika } i \neq l \end{cases} \quad (16)$$

Untuk $\phi_j, \phi_{jx}, \phi_{jy}$ dan $\phi_k, \phi_{kx}, \phi_{ky}$ dapat ditentukan dengan cara yang sama dengan $\phi_i, \phi_{ix}, \phi_{iy}$ yang ditentukan dari Persamaan (17), (18), dan (19).

$$\phi_i = L_1 + L_1^2 L_2 + L_1^2 L_3 - L_1 L_2^2 - L_1 L_3^2 \quad (17)$$

$$\phi_{ix} = -c_2 \left(L_3 L_1^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) + c_3 \left(L_2 L_1^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \quad (18)$$

$$\phi_{iy} = b_2 \left(L_3 L_1^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) - b_3 \left(L_2 L_1^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right), \quad (19)$$

Sehingga persamaan *shape function* pada *node l* dapat dihitung menggunakan Persamaan (20).

$$\begin{aligned} \hat{N}_l = & \phi_i N_l^{[1]} + \phi_{ix} \bar{N}_{l,x}^{[1]} + \phi_{iy} \bar{N}_{l,y}^{[1]} + \phi_j N_l^{[2]} + \phi_{jx} \bar{N}_{l,x}^{[2]} + \phi_{jy} \bar{N}_{l,y}^{[2]} + \phi_k N_l^{[3]} + \phi_{kx} \bar{N}_{l,x}^{[3]} + \\ & \phi_{ky} \bar{N}_{l,y}^{[3]} \end{aligned} \quad (20)$$

3.3 Modifikasi TFEM

Pada kasus kasus tertentu TFEM diperlukan modifikasi untuk mengembalikan *average derivative* rata rata sehingga membuat *node* tersebut kembali memiliki kontinuitas C^0 , *node* tersebut antara lain *essential boundary* dan batas batas material yang berbeda. Tanpa modifikasi tersebut performa TFEM hanya baik pada beberapa kasus tertentu sehingga diperlukan untuk memodifikasi TFEM. Modifikasi dari *average derivative* rata rata pada *node i* dan elemen *e* dapat dilihat pada Persamaan (21).

$$\bar{N}_{i,x} = N_{i,x}^{[e]} \quad (21)$$

Jika modifikasi TFEM dilakukan pada semua *node* dalam masalah, maka semua *node* akan memiliki kontinuitas C^0 dan TFEM akan berubah kembali menjadi FEM standar.

4. PENGUJIAN NUMERIK DAN BENCHMARK PROBLEM

Pada penelitian ini dilakukan pengujian numerik menggunakan *benchmark problem* yang berisi masalah masalah *plane-strain* dan *axisymmetric*. Pada pengujian numerik tersebut dilakukan pengujian konvergensi yang menggunakan *relative energy norm error* sebagai indikator performa TFEM yang dibandingkan dengan FEM standar, selain itu dilakukan juga pengujian terhadap *volumetric locking* untuk melakukan verifikasi terhadap hasil yang didapat oleh Wu, Zheng, Tang dan Zhang (2010). Untuk menghitung integrasi yang diperlukan untuk menghitung matriks kekakuan dan gaya elemen digunakan integrasi numerik *gauss quadrature* dengan 6 *sampling point* untuk integrasi 2 dimensi dan 3 *sampling point* untuk integrasi 1 dimensi.

4.1 Relative Energy Norm Error

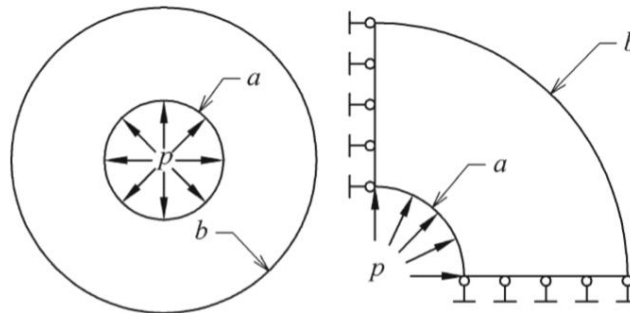
Untuk pengujian konvergensi dari TFEM, akan digunakan *relative energy norm error* (rU) sebagai pedoman untuk menguji performa dari TFEM maupun FEM. *Relative energy norm error* dapat dihitung dengan Persamaan (22).

$$rU = \frac{\frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^{app} - \boldsymbol{\varepsilon}^{exact})^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon}^{app} - \boldsymbol{\varepsilon}^{exact}) dV}{\frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^{exact})^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^{exact} dV} \quad (22)$$

Dimana: ϵ adalah matriks *strain* dari masalah, \mathbf{D} adalah matriks relasi hubungan *stress-strain*, dan V adalah volume dari masalah tersebut. ϵ^{exact} didapatkan dari solusi analitik dari masalah tersebut dan ϵ^{app} didapatkan dari hasil numerical yang didapatkan menggunakan TFEM atau FEM standar.

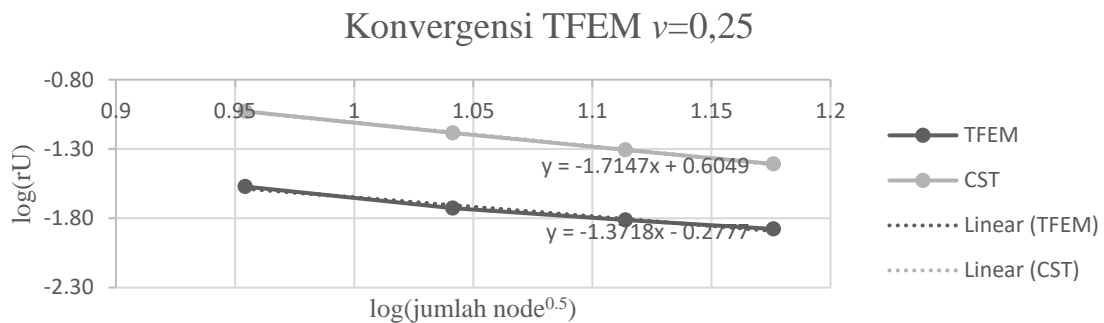
4.2 Silinder Berlubang dengan Tegangan Internal

Pengujian masalah silinder berlubang dengan radius dalam a , radius luar b , dan tegangan pada bagian dalam p yang ditunjukkan pada **Gambar 2**. Pada masalah ini diasumsikan diasumsikan $p = 1$ MPa, $a = 1$ mm, $b = 5$ mm, $E = 1 \times 10^3$ MPa, dan diasumsikan dalam keadaan *plane strain*. Untuk ν diasumsikan 0,25, dan 0,499. Masalah tersebut diujikan menggunakan 4 *mesh* yaitu 81, 121, 169, dan 225 *nodes*.

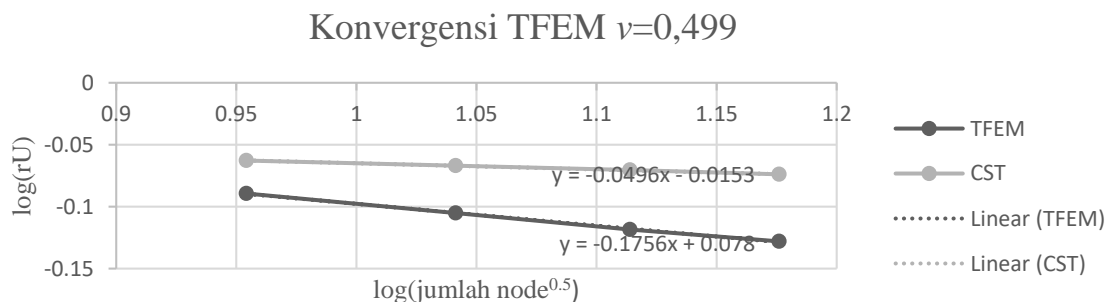


Gambar 2. Silinder Berlubang dengan Tegangan Internal

Pada **Gambar 3** dan **Gambar 4** menunjukkan laju konvergensi TFEM dibandingkan dengan FEM. Pada $\nu = 0,25$, TFEM memberikan hasil yang lebih akurat tetapi laju konvergensi dari TFEM lebih landai dari FEM standar. Sedangkan untuk $\nu = 0,499$, pada *problem* silinder berlubang, TFEM dikatakan mengalami *volumetric locking* karena hasil *relative energy error* besar dan tidak mengalami penurunan yang signifikan seiring dengan bertambahnya jumlah elemen *mesh* walaupun hasil yang diperoleh lebih baik dari FEM standar.



Gambar 3. Grafik Konvergensi *Relative Energy Norm Error* TFEM dibanding FEM Standar untuk $\nu=0,25$



Gambar 4. Grafik Konvergensi *Relative Energy Norm Error* TFEM dibanding FEM Standar untuk $\nu=0,499$

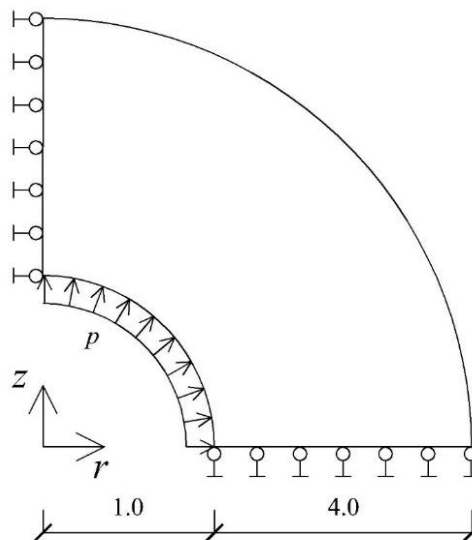
Relative energy norm error dari masalah ini dapat dilihat pada **Tabel 1**. Pada tabel tersebut *volumetric locking* juga dapat diamati dari *relative energy norm error* yang cukup besar dengan $\nu = 0,499$.

Tabel 1. Tabel Relative Energy Norm Error Silider dengan Tegangan Internal

Jumlah Node	$\nu=0,25$				$\nu=0,499$			
	TFEM		CST		TFEM		CST	
	U	rU	U	rU	U	rU	U	rU
81	0,001019	3,5%	0,000959	9,4%	0,000610	84,6%	0,000533	86,5%
121	0,001030	2,5%	0,000987	6,5%	0,000728	81,6%	0,000565	85,7%
169	0,001035	2,0%	0,001003	4,9%	0,000832	79,0%	0,000592	85,0%
225	0,001038	1,8%	0,001013	3,9%	0,000917	76,8%	0,000619	84,4%
Exact	0,001056	0,0%	0,001056	0,0%	0,003957	0,0%	0,003957	0,0%

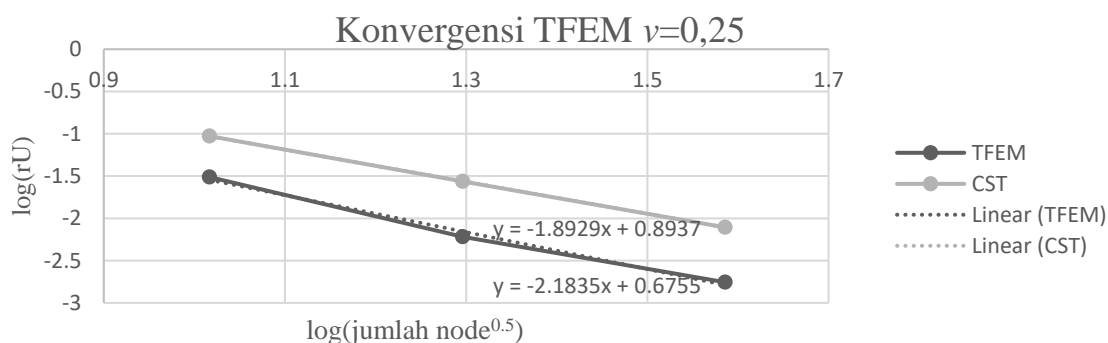
4.3 Bola dengan Tegangan Internal

Pengujian masalah bola yang diberikan tegangan internal p ini diusulkan oleh Huang & Li (2004) dan dapat dilihat pada **Gambar 5**. Pada masalah ini bola memiliki radius dalam 1 mm, radius luar 5 mm, E sebesar 10^3 Mpa dan tegangan internal p sebesar 1 Mpa. Masalah bola merupakan masalah *axisymmetric*, seperti silinder berlubang, bola hanya akan dimodelkan seperempat dari seluruh badan. Untuk ν diasumsikan sebesar 0,25 dan 0,499. Masalah ini akan dimodelkan menggunakan 3 *mesh* yaitu 108, 391, dan 1485 *nodes*.

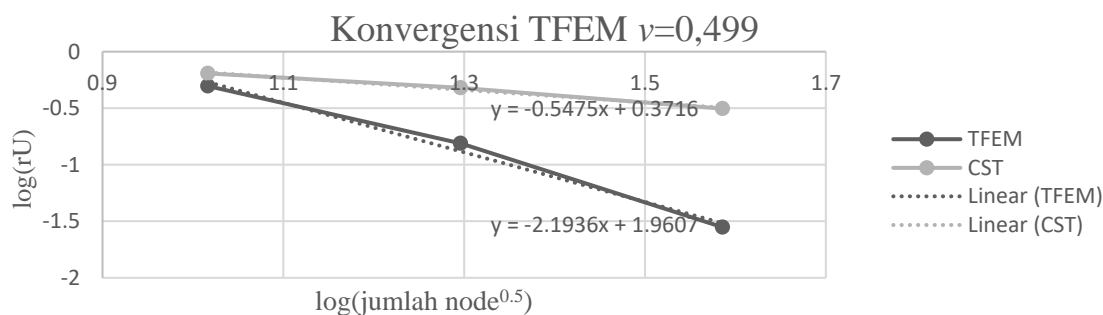


Gambar 5. Potongan Bola dengan Tegangan Internal

Pada **Gambar 6** dan **Gambar 7** menunjukkan laju konvergensi TFEM dibandingkan dengan FEM standar. Pada $\nu = 0,25$ dan $0,499$, TFEM terlihat memiliki laju konvergensi yang lebih cepat dari TFEM. Hal ini menunjukkan bahwa laju konvergensi dari TFEM bergantung dari *mesh* elemen karena semakin halus *mesh* laju konvergensi dari TFEM menjadi lebih cepat dari FEM standar. Untuk $\nu = 0,499$ pada TFEM terlihat memiliki *relative energy norm error* yang kecil dibandingkan dengan FEM standar dan mempunyai penurunan yang signifikan dengan bertambahnya mesh.



Gambar 6. Grafik Konvergensi *Relative Energy Norm Error* TFEM dibanding FEM Standar untuk $\nu=0,25$



Gambar 7. Grafik Konvergensi *Relative Energy Norm Error* TFEM dibanding FEM Standar untuk $\nu=0,499$

Namun jika dilihat *relative energy norm error* dari masalah ini yang dapat dilihat pada **Tabel 2**, pada tabel tersebut terlihat bahwa *relative energy norm error* milik TFEM dari masalah ini mengalami peningkatan, sehingga dapat disimpulkan dalam masalah ini TFEM juga mengalami *volumetric locking*.

Tabel 2. Tabel *Relative Energy Norm Error* Silider dengan Tegangan Internal

Jumlah Node	$\nu=0,25$				$\nu=0,499$			
	TFEM		CST		TFEM		CST	
	U	rU	U	rU	U	rU	U	rU
108	0,000363	3,07%	0,000340	9,36%	0,000226	49,49%	0,000161	64,01%
391	0,000372	0,61%	0,000365	2,73%	0,000379	15,42%	0,000234	47,75%
1485	0,000374	0,18%	0,000372	0,78%	0,000436	2,80%	0,000308	31,26%
Exact	0,000375	0,00%	0,000375	0,00%	0,000448	0,00%	0,000448	0,00%

5. KESIMPULAN

Kinerja metode elemen hingga dengan interpolasi ganda (TFEM) telah dievaluasi dalam masalah *plane strain* dan *axisymmetric*. Dari hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa:

1. TFEM memiliki *shape function* yang kontinu sehingga menghasilkan tegangan maupun perpindahan yang sifatnya kontinu untuk seluruh elemen kecuali untuk elemen yang termodifikasi menggunakan *shape function* FEM standar.
2. *Relative energy norm error* yang dihasilkan oleh TFEM lebih rendah dari FEM standar.
3. Laju konvergensi dari TFEM bergantung pada *mesh* yang digunakan. Laju konvergensi dari TFEM lebih cepat dari FEM standar pada *mesh* yang relatif halus dan begitu juga sebaliknya.
4. Pada masalah *plane strain* dan *axisymmetric* yang diujikan terjadi *volumetric locking* untuk metode TFEM dan FEM standar.
5. Secara keseluruhan kinerja TFEM dapat memberikan hasil yang lebih baik dari FEM standar.

6. DAFTAR REFERENSI

- Cortis, M., Augarde, C., Coombs, W., & Charlton, T. J. (2018). "Overcoming Volumetric Locking in Material Point Methods." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 333, No. 1, 1-21.
- Huang, Y. Q., & Li, Q. S. (2004). "Four-Node Incompatible Plane and Axisymmetric Elements with Quadratic Completeness in The Physical Space." *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 61, No. 10, 1603–1624.
- Kim, N. H. (2015). *NAFEMS Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Springer, New York.
- Lee, N. S., & Bathe, K. J. (1993). "Effects of Element Distortions on The Performance of Isoparametric Elements." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, No. 20, 3553-3576.
- Wu, S. C., Zheng, C., Tang, X. H., & Zhang, J. H. (2010). "A Novel Twice-Interpolation Finite Element Method for Solid Mechanics Problems." *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 26, No. 2, 265-278.