

PEMROGRAMAN DAN APLIKASI ELEMEN – ELEMEN SEGITIGA LINIER DAN KUADRATIK UNTUK MASALAH TORSI SAINT-VENANT

Wirmansyah Chandra Wijaya¹, Johan Siandy Putra², Wong Foek Tjong³, Joko Purnomo⁴

ABSTRAK : Masalah torsi sering kali ditemui dalam bidang struktur. Solusi eksak permasalahan torsi untuk struktur berpenampang lingkaran mudah didapatkan tidak seperti penampang lain dengan penampang *non-circular*. Permasalahan ini dijawab oleh Saint-Venant dengan mengasumsikan deformasi yang akan terjadi. Dalam penelitian ini metode elemen hingga dengan elemen segitiga linier dan elemen segitiga kuadratig digunakan untuk menyelesaikan permasalahan torsi dari Saint-Venant. Berbagai macam material telah diuji, termasuk di dalamnya material isotropik, ortotropik dan anisotropik yang homogen dan non homogen. Perumusan *displacement function* digunakan untuk berbagai penampang *singly* dan *multiply connected* dengan material isotropik, ortotropik dan anisotropik yang homogen dan non homogen. Sementara perumusan *stress function* digunakan untuk berbagai penampang *singly connected* dengan material isotropik yang homogen dan non homogen. Hasil dari penelitian ini yang berupa kekakuan torsi dan nilai tegangan geser.

KATA KUNCI : metode elemen hingga, permasalahan torsi saint-venant, *singly connected*, *multiply connected*, homogen, non homogen, isotropik, ortotropik, anisotropik, konstanta torsi, tegangan geser.

1. PENDAHULUAN

Metode elemen hingga (MEH) adalah metode analisis secara numerik yang secara luas digunakan dalam 50 tahun terakhir. Penggunaannya akan terus meningkat dalam beberapa tahun ke depan karena dianggap memudahkan pemecahan permasalahan yang tidak dapat diselesaikan dengan metode eksak. MEH menggunakan pendekatan dengan hasil yang tidak eksak. Perbedaan hasil yang mungkin terjadi dapat dikurangi dengan menambah persamaan – persamaan yang digunakan sehingga akurasi dapat diterima dalam dunia teknik (Bathe, 2014; Cook et al., 1989).

Masalah torsi sering kali ditemui dalam bidang struktur. Solusi eksak struktur sederhana seperti batang dengan penampang lingkaran dapat didapatkan karena kondisi penampang lingkaran yang tetap datar dan berputar tanpa distorsi selama mengalami puntir. Lain halnya dengan batang berpenampang *non-circular* yang akan mengalami perubahan penampang menjadi tidak datar dan distorsi yang terjadi berbeda – beda di setiap titik sisi penampang sehingga tidak memenuhi persamaan kesetimbangan dan *boundary conditions*-nya. Saint-Venant mengemukakan metode *semi-inverse* yaitu dengan mengasumsi deformasi yang akan terjadi pada batang penampang *non-circular* untuk menjawab permasalahan serta memenuhi persamaan kesetimbangan dan *boundary conditions* yang ada (Timoshenko, 1951).

Kebutuhan analisis masalah torsi untuk profil baja dengan bentuk atau campuran material yang baru merupakan contoh yang menunjukkan dunia teknik sipil sering kali tidak dapat terlepas dari masalah torsi. Analisis menggunakan MEH dapat memecahkan masalah torsi tersebut.

¹Mahasiswa Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra, wewe28081996@gmail.com

²Mahasiswa Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra, johan_siandy@yahoo.com

³Dosen Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra, wftjong@petra.ac.id

⁴Dosen Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra, jpurnomo@petra.ac.id

2. PERUMUSAN DAN IMPLEMENTASI ELEMEN HINGGA UNTUK MASALAH TORSI SAINT-VENANT

Pada bagian ini akan ditunjukkan persamaan-persamaan penentu untuk perumusan *displacement function* dan *stress function* untuk masalah torsi Saint-Venant.

2.1 PERSAMAAN PENENTU *DISPLACEMENT FUNCTION*

Menurut Saint-Venant (Desai, 1978), bila batang diberi momen torsi maka *displacement field* dapat diasumsikan sebagai

$$u = -\theta zy \quad v = \theta zx \quad w = \theta\psi(x, y) \quad (1)$$

Dimana u adalah *displacement* arah x , v adalah *displacement* arah y , w adalah *displacement* arah z , θ adalah sudut pluntir per satuan panjang, dan $\psi(x, y)$ adalah *displacement function*. Dengan demikian, untuk mencari komponen matriks tegangan yang tidak nol adalah

$$\{\sigma\} = [G]\{\varepsilon\} \quad (2)$$

dimana $\nabla\psi$ adalah gradient *displacement function*, dan

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}, \quad [G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{21} \end{bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y \right) \\ \theta \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x \right) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Persamaan penentu untuk pada domain (A) dan *boundary condition* pada permukaan (Γ) adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} &= 0 \text{ pada domain } A \\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y \right) \frac{dy}{ds} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x \right) \frac{dx}{ds} &= 0 \text{ pada permukaan } \Gamma \end{aligned} \quad (4)$$

Energi potensial total dari batang tanpa meninjau beban torsi pada ujung batang dapat dituliskan sebagai

$$\Pi_p = \frac{h}{2} \iint_A \{\varepsilon\}^T [G] \{\varepsilon\} dA \quad (5)$$

Untuk mencari *displacement function*, ψ , dapat menggunakan prinsip energi potensial minimum, yaitu variasi pertama dari Π_p terhadap ψ adalah nol.

$$\delta\Pi_p = 0 \quad (6)$$

2.2 PERSAMAAN PENENTU *STRESS FUNCTION*

Masalah torsi dapat diekspresikan menggunakan konsep *stress function*, ϕ . Dua tegangan geser yang tidak nol adalah

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ -\frac{\partial\phi}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = [R]\{\nabla\phi\} \quad (7)$$

Persamaan penentu untuk pada domain (Ω) dan *boundary condition* pada permukaan (Γ) adalah

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= -2G\theta \text{ pada domain } \Omega \\ \varphi &= 0 \text{ pada perumakaan } \Gamma\end{aligned}\quad (8)$$

dimana G adalah modulus geser dan θ adalah sudut puntir per satuan panjang.

Energi potensial komplementer total dapat ditulis sebagai

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \iint_A \{\nabla \varphi\}^T [G]^{-1} \{\nabla \varphi\} dx dy - \iint 2\theta \{\varphi\} dx dy \quad (9)$$

$$\text{dimana } [G] = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad (10)$$

Untuk mencari *stress function*(φ), dapat menggunakan prinsip energi potensial komplementer minimum, yaitu variasi pertama dari Π_c terhadap φ adalah nol.

$$\delta \Pi_c = 0 \quad (11)$$

2.3 PERUMUSAN METODE ELEMEN HINGGA *DISPLACEMENT FUNCTION*

Fungsi ψ dapat didekati dengan menggunakan metode elemen hingga segitiga sebagai berikut

$$\psi(x, y) = N_1 \psi_1 + N_2 \psi_2 + \dots + N_n \psi_n = [N] \{q_\psi\} \quad (12)$$

di mana $[N]$ adalah *shape function* dan $\{q_\psi\}$ adalah

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n], \quad \{q_\psi\} = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_n]^T \quad (13)$$

Dengan prinsip energi potensial minimum, maka dapat didapatkan

$$\iint_A [B]^T [G] [B] dx dy \{q_\psi\} = \iint_A [B]^T [G] [T] [N_x] \{x_n\} dx dy \quad (14)$$

Persamaan (14) dapat ditulis sebagai

$$[k_\psi] \{q_\psi\} = \{Q_\psi\} \quad (15)$$

dimana $[B], [T], [N_x], \{x_n\}$ adalah

$$[B] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{X\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Konstanta torsi (J) dan kekakuan torsi (D) dapat didapatkan dengan menggunakan persamaan berikut

$$\begin{aligned}J &= \iint_A (\{X\}^T [T]^T [B] \{q_\psi\} + \{X\}^T \{X\}) dx dy \\ D &= \iint_A \left(\{X\}^T [T]^T [G] [B] \{q_\psi\} + \{X\}^T \begin{bmatrix} G_{22} & -G_{12} \\ -G_{12} & G_{11} \end{bmatrix} \{X\} \right) dx dy\end{aligned}\quad (17)$$

2.4 PERUMUSAN METODE ELEMEN HINGGA *STRESS FUNCTION*

Fungsi φ dapat didekati dengan menggunakan metode elemen hingga segitiga sebagai berikut

$$\varphi = N_1 \varphi_1 + N_2 \varphi_2 + \dots + N_n \varphi_n = [N] \{q_\varphi\} \quad (18)$$

di mana $\{q_\varphi\}$ adalah

$$[q_\varphi] = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_n]^T \quad (19)$$

Dengan prinsip energi potensial komplementer minimum, maka dapat didapatkan

$$\int \int [B]^T [G]^{-1} [B] dx dy \{q_\varphi\} = \int \int (2\theta) [N]^T dx dy \quad (20)$$

Persamaan dapat ditulus sebagai

$$[k_\varphi] \{q_\varphi\} = \{Q_\varphi\} \quad (21)$$

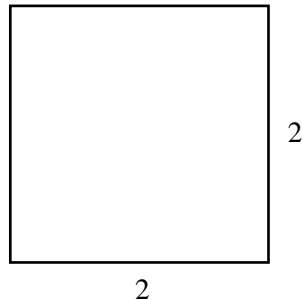
Di mana k adalah matrix kekakuan elemen dan $\{Q\}$ adalah elemen *nodal forcing parameter vector*. Konstanta torsi (J) dan kekakuan torsi (D) dapat didapatkan dengan menggunakan persamaan berikut

$$J = -\frac{1}{\theta} \iint_A \{X\}^T [G]^{-1} \{\nabla \varphi\} dx dy, \quad D = -\frac{1}{\theta} \iint_A \{X\}^T \{\nabla \varphi\} dx dy \quad (22)$$

3. HASIL ANALISA NUMERIK

3.1 PENAMPANG PERSEGI HOMOGEN

Penampang persegi berdimensi panjang dan lebar 2 satuan seperti **Gambar 1**. digunakan untuk menguji kekakuan torsi dengan persamaan *displacement function* dan *stress function*. Penampang persegi menggunakan material homogen dengan modulus geser $G = 1$, *angle of twist* $\theta = 1$. Digunakan *reference solution* hasil analitis untuk kekakuan torsi $D=2,24923$. Data hasil numerik dari elemen segitiga linier dan kuadratik dengan persamaan *displacement function* dan *stress function* disajikan pada **Tabel 1**.



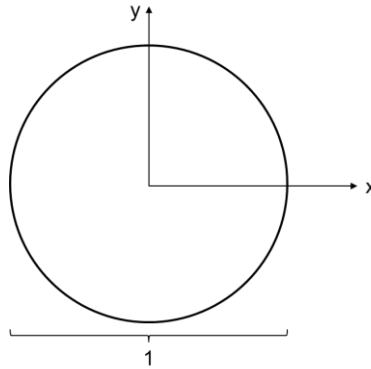
Gambar 1. Penampang Persegi dengan Material Homogen

Tabel 1. Hasil Penelitian Kekakuan Torsi Penampang Persegi

Jumlah Titik Nodal	<i>Displacement Function</i>		<i>Stress Function</i>	
	Elemen Segitiga Linier	Elemen Segitiga Kuadratik	Elemen Segitiga Linier	Elemen Segitiga Kuadratik
25	2.4167	2.3333	1.8438	2.1333
81	2.2981	2.2576	2.1391	2.2387
289	2.2621	2.2499	2.2210	2.2484
1089	2.2525	2.2493	2.2421	2.2492
4225	2.2500	2.2492	2.2474	2.2492
Hasil Analitis	2.24923			

3.2 PENAMPANG LINGKARAN HOMOGEN

Penampang lingkaran dengan diameter 1 satuan pemodelan seperti pada **Gambar 2**, modulus geser $G=1$ dan *angle of twist* $\theta=1$ digunakan untuk menguji kekakuan torsi dan nilai tegangan geser. Hasil dari persamaan *displacement function* dan *stress function* akan dibandingkan dengan hasil analitis untuk kekakuan torsi $D = \frac{1}{32} \pi d^4$ dan untuk tegangan geser $\tau = \frac{M_t \times r}{G \times J}$ dimana $\frac{M_t}{G \times J} = \theta$. Dengan menggunakan diameter 1 satuan kekakuan torsi $D=0.09817$ dan tegangan geser $\tau = 0.5$ pada bagian terluar dari permukaan lingkaran dengan koordinat titik $x = 0.5$ dan $y = 0$. Hasil penelitian untuk kekakuan torsi disajikan pada **Tabel 2**. Hasil penelitian untuk tegangan geser disajikan pada **Tabel 3**.



Gambar 2. Penampang Lingkaran dengan Material Homogen

Tabel 2. Hasil Penelitian Kekakuan Torsi untuk Penampang Lingkaran

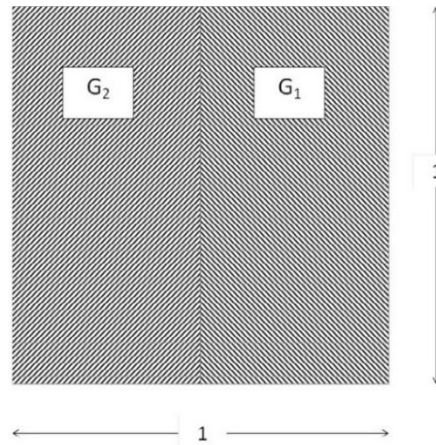
Jumlah Elemen	<i>Displacement Function</i>		<i>Stress Function</i>	
	Elemen Segitiga Linier	Elemen Segitiga Kuadratik	Elemen Segitiga Linier	Elemen Segitiga Kuadratik
24	0.07976	0.08213	0.07453	0.09403
96	0.09324	0.09365	0.09163	0.09762
384	0.09692	0.09698	0.09649	0.09810
1536	0.09786	0.09787	0.09775	0.09817
6144	0.09810	0.09810	0.09807	0.09817
Hasil Analitis	0.09817			

Tabel 3. Hasil Penelitian Tegangan Geser pada Titik $x=0.5$ dan $y=0$ untuk Penampang Lingkaran

Jumlah Elemen	<i>Displacement Function</i>		<i>Stress Function</i>	
	Elemen Segitiga Linier	Elemen Segitiga Kuadratik	Elemen Segitiga Linier	Elemen Segitiga Kuadratik
24	0.50000	0.50000	0.37420	0.43547
96	0.50000	0.50000	0.45274	0.47518
384	0.50000	0.50000	0.48059	0.48970
1536	0.50000	0.50000	0.49127	0.49540
6144	0.50000	0.50000	0.49583	0.49784
Hasil Analitis	0.50000			

3.3 PENAMPANG PERSEGI NON HOMOGEN

Digunakan penampang persegi berdimensi panjang dan lebar 1 satuan yang dibagi menjadi dua bagian sama besar dengan material yang berbeda (**Gambar 3**) untuk menguji akurasi dari hasil kekakuan torsi. Penampang non homogen akan diuji dengan menggunakan dua macam perbandingan modulus geser, yang pertama yaitu $G_1= 2, G_2= 1, R= G_2/G_1= 2, \theta=1$ dan yang kedua yaitu $G_1= 3, G_2= 1, R= G_2/G_1= 3, \theta= 1$. Hasil akan dibandingkan dengan. Hasil penelitian kekakuan torsi untuk $R = 2$ disajikan pada **Tabel 4**. Hasil penelitian kekakuan torsi untuk $R = 3$ disajikan pada **Tabel 5**.



Gambar 3. Penampang Persegi dengan Material Non Homogen $R=G_2/G_1$, Sumber : Jog (2014)

Tabel 4. Hasil Penelitian Penampang Persegi dengan Material Non Homogen $R=G_2/G_1=2$

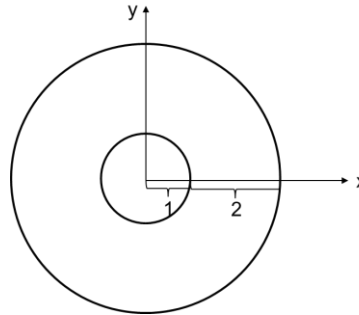
Jumlah Elemen	Displacement Function		Stress Function	
	Elemen Segitiga Linier	Elemen Segitiga Kuadratik	Elemen Segitiga Linier	Elemen Segitiga Kuadratik
20	0.23397	0.20029	0.16834	0.19454
80	0.20873	0.19725	0.18746	0.19674
320	0.20013	0.19699	0.19437	0.19695
1280	0.19777	0.19697	0.19630	0.19696
5120	0.19717	0.19696	0.19692	0.19696
20480	0.19702		0.19695	
Hasil Analitis	0.197			

Tabel 5. Hasil Penelitian Penampang Persegi dengan Material Non Homogen $R=G_2/G_1=3$

Jumlah Elemen	Displacement Function		Stress Function	
	Elemen Segitiga Linier	Elemen Segitiga Kuadratik	Elemen Segitiga Linier	Elemen Segitiga Kuadratik
20	0.28526	0.24405	0.20295	0.23606
80	0.25441	0.23984	0.22715	0.23913
320	0.24351	0.23948	0.23607	0.23942
1280	0.24049	0.23945	0.23858	0.23945
5120	0.23971	0.23945	0.23923	0.23945
20480	0.23952		0.23940	
Hasil Analitis	0.2394			

3.4 PENAMPANG LINGKARAN MULTIPLY CONNECTED

Penampang lingkaran dengan jari – jari dalam 1 satuan, jari – jari luar 3 satuan, modulus geser $G= 1$ dan *angle of twist* $\theta= 1$ seperti pada **Gambar 4**. digunakan untuk menguji kekakuan torsi untuk penampang *multiply connected*. Pada penelitian ini penampang *multiply connected* hanya akan diuji dengan menggunakan persamaan *displacement function* karena kurangnya literatur yang membahas persamaan *stress function*. Hasil analitis diperoleh dengan perumusan $D = \frac{1}{2}\pi(r_{\text{lingkaran luar}}^4 - r_{\text{lingkaran dalam}}^4)$ dimana r adalah jari – jari lingkaran. Hasil penelitian untuk nilai kekakuan torsi disajikan pada **Tabel 6**.



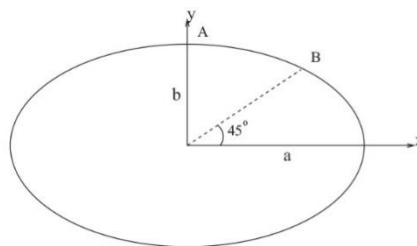
Gambar 4. Penampang Lingkaran Multiply Connected

Tabel 6. Hasil Penelitian untuk Kekakuan Torsi Penampang Lingkaran Multiply Connected

Jumlah Elemen	Elemen Segitiga Linier	Elemen Segitiga Kuadratik
138	124.2882	124.40082
552	125.3232	125.33706
2208	125.5788	125.58048
8832	125.6425	125.64270
35328	125.6584	125.65843
Hasil Analitis	125.6637	

3.5 PENAMPANG ELIPS ANISOTROPIK

Penampang elips dengan $a = 20$ satuan dan $b = 10$ (**Gambar 5**) satuan material anisotropik dengan properti material $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ dan Moment torsi $M_t = 1$ digunakan untuk menguji akurasi hasil dari kekakuan torsi. Hasil analitis sebagai pembandingan diambil dari Jog (2014). Hasil penelitian untuk perumusan *displacement function*, elemen segitiga linier dan kuadratik disajikan pada **Tabel 7**. Nilai tegangan geser arah xz pada koordinat $x = 0, y = 10$ disajikan pada **Tabel 8**.



Gambar 5. Penampang Elips dengan Dimensi $a = 20$ Satuan dan $b = 10$ Satuan, Material Ortotropik

Tabel 7. Hasil Penelitian Kekakuan Torsi Penampang Elips

Jumlah Elemen	Elemen Segitiga Linier (10^4)	Elemen Segitiga Kuadrat (10^4)
18	5.84466	2.85218
72	3.93060	2.98102
288	3.30064	3.02898
1152	3.11422	3.04189
4608	3.06377	3.04525
Hasil Analitis	3.046	

Tabel 8. Hasil Penelitian Tegangan Geser Penampang Elips

Jumlah Elemen	Elemen Segitiga Linier (10^{-4})	Elemen Segitiga Kuadrat (10^{-4})
18	-4.00407	-3.54262
72	-3.89540	-3.26308
288	-3.84687	-3.20268
1152	-3.62041	-3.18797
4608	-3.42844	-3.18432
Hasil Analitis	-3.1831	

4. KESIMPULAN

Dari penelitian yang dilakukan, metode elemen hingga dengan perumusan *displacement function* menunjukkan hasil yang mendekati hasil analitis untuk penampang homogen maupun non homogen dengan material isotropik maupun anisotropik untuk penampang *simply connected* maupun *multiply connected*. Sementara dengan perumusan *stress function* menunjukkan hasil yang mendekati hasil analitis untuk penampang homogen maupun non homogen dengan material isotropik untuk penampang *singly connected*.

5. DAFTAR REFERENSI

- Bathe, K. J. (2014). *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, New Jersey.
- Cook, R.D., Malkus, D.S., & Plesha, M.E. (1989). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, New York.
- Desai, C. S. (1978). *Elementary Finite Element Method*. Prentice Hall, New Jersey.
- Jog, C. S., & Mokashi, I. S. (2014). A Finite Element Method for the Saint-Venant Torsion and Bending Problems for Prismatic Beams. *Computers and Structures*, vol.135, 61-72.
- Timoshenko, S., & Goodier, J. N. (1951). *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Book Company, New York.