

ELEMEN SEGITIGA BERBASIS KRIGING DENGAN TEGANGAN KONTINU PADA TITIK NODAL

Theodore A. Ludong¹, Christian Kentaro², Wong Foek Tjong³

ABSTRAK: Diperkenalkan MEH-K Modifikasi yang menggabungkan metode elemen hingga berbasis Kriging dan elemen Trig3-CNS dengan harapan kelemahan masing-masing metode dapat diatasi. Elemen Trig3-CNS yang digunakan disusun dengan *constrained orthonormalised least square* (CO-LS) yang diinterpolasi menggunakan metode elemen hingga. Metode elemen hingga menggunakan Kriging *shape function*. Pada penelitian ini disajikan aplikasi MEH-K Modifikasi dalam penyelesaian masalah *plane-stress* dan *plane-strain* pada beberapa *benchmark problem*. MEH-K Modifikasi dibandingkan dengan MEH-K dan Trig3-CNS untuk mengetahui apakah tujuan tercapai dengan *relative error* perpindahan dan energi regangan sebagai pembanding. Penerapan MEH-K Modifikasi dilakukan dengan bantuan pemrograman MATLAB. Hasil yang didapatkan menunjukkan bahwa dengan diperhalusnya *mesh*, MEH-K Modifikasi dapat memberikan hasil yang makin mendekati eksak, menunjukkan sifat konvergen. MEH-K Modifikasi juga dapat memberikan *stress contour* yang baik. Pada problem balok kantilever dan pelat siku, perlu perlakuan khusus agar MEH-K Modifikasi dapat memberikan hasil yang baik, sehingga masih perlu dilakukan penelitian lebih lanjut.

KATA KUNCI: MEH-K modifikasi, trig3-CNS, CO-LS, kriging *shape function*, *plane stress* dan *plane strain*, MATLAB.

1. PENDAHULUAN

Metode elemen hingga (MEH) saat ini memiliki peranan yang penting dalam dunia teknik terutama dalam menyelesaikan masalah yang kompleks dan terlalu rumit untuk diselesaikan secara analitik. MEH telah diterapkan di berbagai bidang teknik untuk mendesain bangunan, mesin, kapal, pesawat, dan sebagainya (Cook, Malkus, Plesha, & Witt, 2002). Beberapa tahun terakhir penelitian untuk mengembangkan metode-metode alternatif dari MEH konvensional telah banyak dilakukan, salah satunya adalah metode elemen hingga berbasis kriging (MEH-K). MEH-K membuat fungsi interpolasi bukan hanya dari *nodes* yang ada di satu elemen yang sedang ditinjau, namun juga memperhitungkan *nodes* yang ada di sekeliling elemen tersebut. Dengan menggunakan MEH-K akan mendapatkan hasil yang akurat cukup dengan menggunakan bentuk elemen yang paling sederhana sekalipun –seperti segitiga. Sebagai metode yang masih cukup baru MEH-K masih memiliki kekurangan yaitu fungsi interpolasi yang dibangun tidak kontinu di sepanjang perbatasan antar elemen yang bersebelahan termasuk di titik-titik nodalnya. Meskipun MEH-K tidak kontinu namun MEH-K terbukti merupakan sebuah metode yang memiliki sifat konvergen (Wong & Kanok-Nukulchai, 2009; Wong, Widjaja, & Soetanto, 2016). Kekurangan dari MEH-K tersebut akan diperbaiki dengan menggunakan *partition of unity method* (PUM) yang dikembangkan baru-baru ini (Yang, Tang, & Zheng, 2014). PUM yang dikembangkan oleh Yang, Tang, & Zheng menggunakan *constrained and orthogonalizing least-squares method* (CO-LS) dalam membentuk fungsi aproksimasi nodal. Metode CO-LS dalam penelitian ini digantikan dengan Interpolasi Kriging.

¹ Mahasiswa Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra, m21414033@petra.ac.id

² Mahasiswa Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra, m21414049@petra.ac.id

³ Dosen Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra, wftjong@petra.ac.id

2. INTERPOLASI KRIGING DALAM METODE ELEMEN HINGGA

Berikut akan diuraikan interpolasi Kriging menurut (Wong & Kanok-Nukulchai, 2009). Tinjau suatu fungsi $u(x)$ yang didefinisikan pada sebuah domain Ω yang terdiri dari sekumpulan *nodes* yang tersebar pada koordinat $\mathbf{x}_i, i=1, 2, \dots, N$, dimana N adalah total *nodes* yang ada di domain. Untuk suatu titik \mathbf{x}_0 yang sedang diamati nilainya dapat di estimasi jika memiliki nilai x_1, x_2, \dots, x_n dengan hubungan:

$$u^h(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(\mathbf{x}_i) \quad (1)$$

Dimana λ_i adalah (Kriging) *weights* dan n adalah jumlah *nodes* yang ada di dalam DOI. DOI adalah daerah di sekeliling elemen, bisa terdiri atas satu lapis, atau dua lapis, atau lebih lagi. Hal ini akan dijelaskan lebih lanjut nantinya. Karena setiap nilai dari fungsi $u(x_1), \dots, u(x_n)$ sebagai realisasi variabel acak maka **Persamaan (1)** dapat ditulis sebagai berikut:

$$U^h(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i U(\mathbf{x}_i) \quad (2)$$

Kriging *weights* ditentukan oleh estimator $U^h(\mathbf{x}_0)$ yang *unbiased*, $E[U^h(\mathbf{x}_0) - U(\mathbf{x}_0)] = 0$ dan variansi yang minimum, $\text{var}[U^h(\mathbf{x}_0) - U(\mathbf{x}_0)]$. Dengan menggunakan metode Lagrange untuk masalah *constrained optimization*, kebutuhan estimator yang *unbiased* dan variansi yang minimum dapat terpenuhi dan didapatkan persamaan Kriging berikut:

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{P}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{r}(\mathbf{x}_0) \quad (3)$$

$$\mathbf{P}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{p}(\mathbf{x}_0) \quad (4)$$

di mana, $[\mathbf{R}]$ adalah sebuah matriks kovarian berukuran $n \times n$, $C(h_{ij})$, yang diantara dua nilai *nodal* dari $U(x)$ yang ditinjau pada $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\}$; $[\mathbf{P}]$ adalah sebuah matriks berukuran $n \times m$ yang berisi nilai-nilai polinomial pada titik-titik *nodes*; $\{\boldsymbol{\lambda}\}$ merupakan vektor dari Kriging *weights*; $\{\boldsymbol{\mu}\}$ adalah vektor pengali dari Lagrange; $\mathbf{r}(\mathbf{x}_0)$ adalah vektor kovarian antara *nodes* dan *node* yang sedang ditinjau, \mathbf{x}_0 ; dan $\mathbf{p}(\mathbf{x}_0)$ adalah vektor vasis polinom di titik \mathbf{x}_0 . Dengan menggunakan **Persamaan (3)** dan **(4)** maka didapatkan Kriging *weights*:

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_0)(\mathbf{P}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}^T\mathbf{R}^{-1} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x}_0)\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{P}\mathbf{A}) \quad (5)$$

Persamaan u^h pada **Persamaan (1)** dapat ditulis ulang dalam bentuk matrix menjadi

$$u^h(\mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{d} \quad (6)$$

dimana $\mathbf{d} = [u(x_1) \dots (u(x_n))]^T$ adalah sebuah matriks vektor nilai nodal. Karena \mathbf{x}_0 adalah titik sembarang yang ada di DOI, maka symbol \mathbf{x}_0 akan digantikan dengan symbol x sehingga **Persamaan (6)** berubah menjadi

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{d} = \sum_{i=1}^n N_i(x)u_i \quad (7)$$

dimana $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{x})$ adalah matriks *shape functions*.

3. BASIS POLINOM DAN FUNGSI KORELASI

Berikut akan dijelaskan basis polinom dan fungsi korelasi sebagaimana tertulis dalam (Wong & Kanok-Nukulchai, 2009). Dalam membentuk *Kriging shape function* pada **Persamaan (7)** diperlukan fungsi basis polinom dan sebuah model dari fungsi kovarians. Untuk fungsi basisnya, selain dasar *complete polynomial*, dapat digunakan pula dasar *incomplete polynomial* seperti dasar *bi-linear*, *bi-quadratic* dan *bi-cubic* untuk interpolasi dalam domain 2D.

Kovarians antara sepasang variabel sebarang $U(\mathbf{x})$ dan $U(\mathbf{x}+\mathbf{h})$ dapat dituliskan dalam fungsi korelasi koefisien, disingkat fungsi korelasi, sebagai berikut:

$$\rho(\mathbf{h}) = C(\mathbf{h})/\sigma^2 \quad (8)$$

dimana $\rho(h)$ adalah fungsi korelasi, $\sigma^2 = \text{var}[U(x)]$, dan \mathbf{h} adalah vektor yang memisahkan dua titik yaitu \mathbf{x} dan $\mathbf{x}+\mathbf{h}$. σ^2 tidak mempengaruhi hasil akhir (Gu, 2003) sehingga pada penelitian kali ini nilainya diambil 1. Model korelasi yang sering digunakan dalam penelitian ini adalah fungsi korelasi *quartic spline* (QS) (Wong & Kanok-Nukulchai, 2006a; 2006b) dengan bentuk berikut:

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{h}{d}\right)^2 + 8\left(\frac{h}{d}\right)^3 - 3\left(\frac{h}{d}\right)^4, & \text{untuk } 0 \leq \frac{h}{d} \leq 1 \\ 0, & \text{untuk } \frac{h}{d} > 1 \end{cases} \quad (9)$$

dengan menggunakan fungsi korelasi QS, perubahan terhadap parameter θ tidak akan mempengaruhi *Kriging shape function* (Wong & Kanok-Nukulchai, 2009).

Pemilihan parameter θ yang tepat sangatlah penting karena hal ini berpengaruh pada hasil KI. Agar didapatkan hasil yang masuk akal dengan K-FEM (Plengkhom & Kanok-Nukulchai, 2005) digunakan *rule of thumb* dalam memilih θ , yaitu dengan batas bawah sebagai berikut,

$$\left| \sum_{i=1}^n N_i - 1 \right| \leq 1 \times 10^{-10+a} \quad (10)$$

dimana a adalah derajat polimomial dari fungsi basis, dan batas atas demikian dan b adalah ruang dimensi yang ditinjau (Plengkhom & Kanok-Nukulchai, 2005). Sebagai contoh untuk benda 2D dengan basis fungsi pangkat 3 maka $a=3$ dan $b=2$.

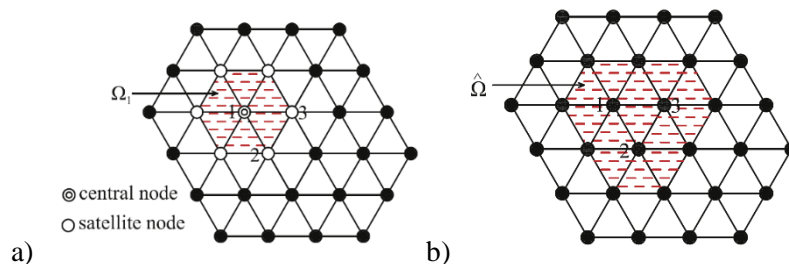
$$\det(\mathbf{R}) \leq 1 \times 10^{-b} \quad (11)$$

Analisa numerik pada batas atas dan bawah nilai θ (Wong & Kanok-Nukulchai, 2006a) menunjukkan bahwa batas parametes berubah-ubah sesuai dengan jumlah *nodes* pada DOI. Dalam penelitian (Wong & Kanok-Nukulchai, 2009), diusulkan fungsi parameter untuk pengaplikasiannya pada K-FEM dalam domain 2D. Untuk korelasi QS fungsi parameternya sebagai berikut

$$\theta = \begin{cases} 0.1329n - 0.3290, & \text{untuk } 3 \leq n < 10 \\ 1, & \text{untuk } n \geq 10 \end{cases} \quad (12)$$

4. LAPISAN ELEMEN NODE PATCH

Selanjutnya akan dijelaskan mengenai *node patch* sesuai dengan yang tertulis pada (Yang, Tang, & Zheng, 2014). Jika ditinjau titik nodal i maka *node patch* dari titik nodal tersebut didefinisikan sebagai Ω_i seperti yang terlihat pada **Gambar 1a**. Titik nodal i yang sedang ditinjau dinamakan *central node* sedangkan titik nodal lainnya pada *node patch* Ω_i dinamakan *satellite nodes*. Dengan demikian, maka satu elemen memiliki tiga *node patch* yang tidak sama satu sama lain. Ketiga *node patch* ini jika dikombinasikan akan membentuk *domain of influence* sesuai dengan **Gambar 1b**.



Gambar 1 Ilustrasi Elemen *Node Patch* dan *Domain of Influence*.

Sumber: Yang, Tang, & Zheng, 2014

5. FORMULASI UNTUK ELEMEN SEGITIGA DENGAN TEGANGAN YANG KONTINU PADA TITIK NODALNYA

Berikut diuraikan formulasi elemen segitiga dengan tegangan kontinu menurut (Yang, Tang, & Zheng, 2014) yang sudah dimodifikasi untuk pendekatan Kriging. Anggap kita sedang meninjau sebuah domain segitiga Ω dengan tiga buah *nodes* $\{P_1 P_2 P_3\}$ dan sebuah titik sembarang $P(\mathbf{x})$ dengan koordinat $\mathbf{x} = (x,y)$. Menurut konsep PUM (Babuška & Melenk, 1997), di dalam domain segitiga Ω , aproksimasi global untuk $u^h(\mathbf{x})$ adalah:

$$u^h(\mathbf{x}) = w_1(\mathbf{x})u_1(\mathbf{x}) + w_2(\mathbf{x})u_2(\mathbf{x}) + w_3(\mathbf{x})u_3(\mathbf{x}) \quad (13)$$

Dimana $w_i(\mathbf{x})$ dan $u_i(\mathbf{x})$ adalah *weight functions* dan *Kriging nodal approximations* terkait dengan *node i*. Koordinat yang digunakan untuk membuat *weight functions* adalah *area coordinates*. Transformasi untuk merubah dari koordinat kartesius menjadi *area coordinates* adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

mirip seperti membentuk *shape function* dari elemen segitiga yang ada di *thin plate theory* (Zienkiewicz & Taylor, 2000), fungsinya dapat dituliskan seperti:

$$w_1(\mathbf{x}) = L_1 + L_1^2 L_2 + L_1^2 L_3 - L_1 L_2^2 - L_1 L_3^2 \quad (15)$$

$$w_2(\mathbf{x}) = L_2 + L_2^2 L_3 + L_2^2 L_1 - L_2 L_3^2 - L_2 L_1^2 \quad (16)$$

$$w_3(\mathbf{x}) = L_3 + L_3^2 L_1 + L_3^2 L_2 - L_3 L_1^2 - L_3 L_2^2 \quad (17)$$

6. PENGUJIAN NUMERIK

Untuk mempelajari konvergensi dari MEH-K modifikasi dalam menyelesaikan masalah *plane-stress/plane-strain* digunakan *relative displacement error* (r_u) dan *relative strain energy error* (r_ε) yang didefinisikan sebagai berikut

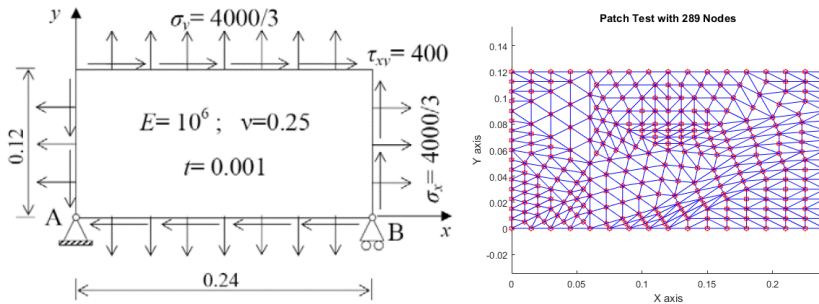
$$r_u = \left(\frac{\int_V (\mathbf{u}^{app} - \mathbf{u}^{exact})^T (\mathbf{u}^{app} - \mathbf{u}^{exact}) dV}{\int_V (\mathbf{u}^{exact})^T \mathbf{u}^{exact} dV} \right)^{1/2} \quad (18)$$

$$r_\varepsilon = \left(\frac{\int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^{app} - \boldsymbol{\varepsilon}^{exact})^T \mathbf{E} (\boldsymbol{\varepsilon}^{app} - \boldsymbol{\varepsilon}^{exact}) dV}{\int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^{exact})^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}^{exact} dV} \right)^{1/2} \quad (19)$$

dimana \mathbf{u}^{app} dan \mathbf{u}^{exact} adalah vektor perpindahan aproksimasi dan eksak sedangkan $\boldsymbol{\varepsilon}^{app}$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}^{exact}$ adalah vektor regangan aproksimasi dan eksak. Penamaan elemen pada penelitian ini terbagi tiga, yaitu MPx-y-QS untuk MEH-K Modifikasi, Px-y-QS untuk MEH-K dan CPx-y untuk Trig3-CNS dengan x penanda basis polinom dan y adalah jumlah *layer*. Untuk beberapa *benchmark problem* digunakan jumlah *layer* selektif, dengan penamaan elemen ditambahkan huruf 's' setelah jumlah *layer* 'y'.

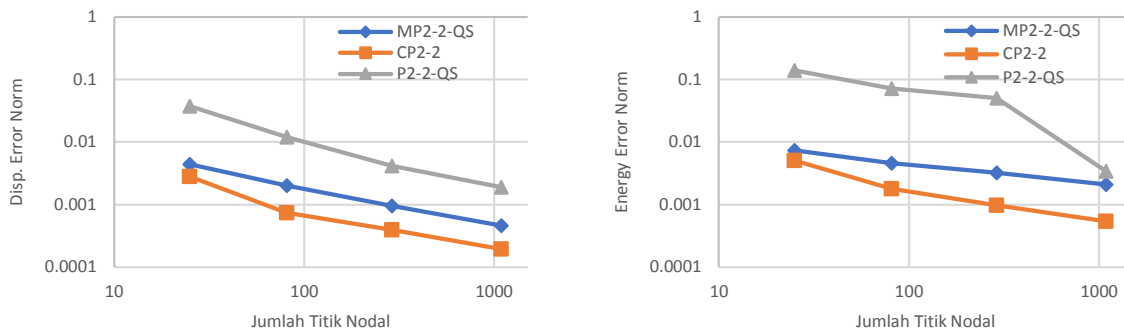
7. PATCH TEST

Pengujian *patch test* diambil dari (Wong & Kanok-Nukulchai, 2009) dengan menggunakan basis polinom *quadratic* dan dianalisa dalam keadaan *plane-stress* dengan jumlah *layer* dua lapis. Fungsi korelasi menggunakan *quartic spline* dengan *theta* yang berbeda untuk setiap *central node*. Analisa menggunakan *mesh* sebanyak 25, 81, 289 dan 1089 titik nodal dengan parameter bahan dan contoh *mesh* seperti pada **Gambar 2**.



Gambar 2. Parameter Bahan Patch Test dan Contoh Mesh dengan 289 titik nodal

Diberi *prescribed displacement* sebesar $u = 0.24 \times 10^{-3}$; $v = 0.12 \times 10^{-3}$ di titik B dengan hasil analisis perpindahan dari *problem* ini dirumuskan $u = 10^{-3}(x + y/2)$ dan $v = 10^{-3}(x/2 + y)$.

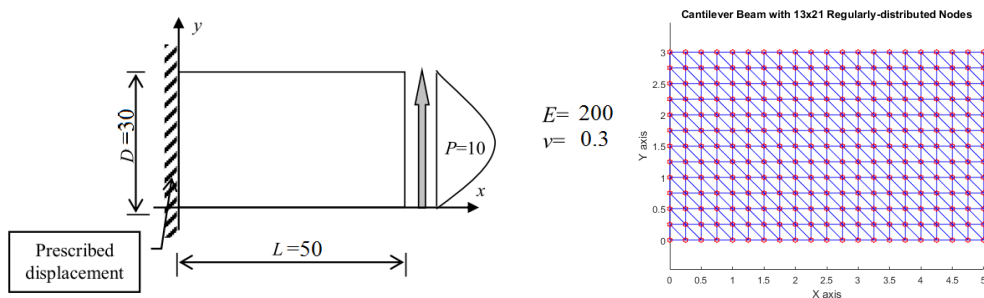


Gambar 3. Grafik *Relative Displacement* dan *Energy Error Patch Test*

Dapat dilihat pada **Gambar 3** bahwa MEH-K Modifikasi konvergen karena hasil yang diberikan akan semakin mendekati hasil eksak jika *mesh* diperhalus. Terlihat juga dari **Gambar 3** bahwa MEH-K modifikasi memiliki akurasi yang lebih baik daripada MEH-K asli. Pada kedua grafik *error norm* terlihat juga bahwa Trig3-CNS ternyata tidak lolos, tidak sesuai dengan yang tertulis pada (Yang, Tang, & Zheng, 2014).

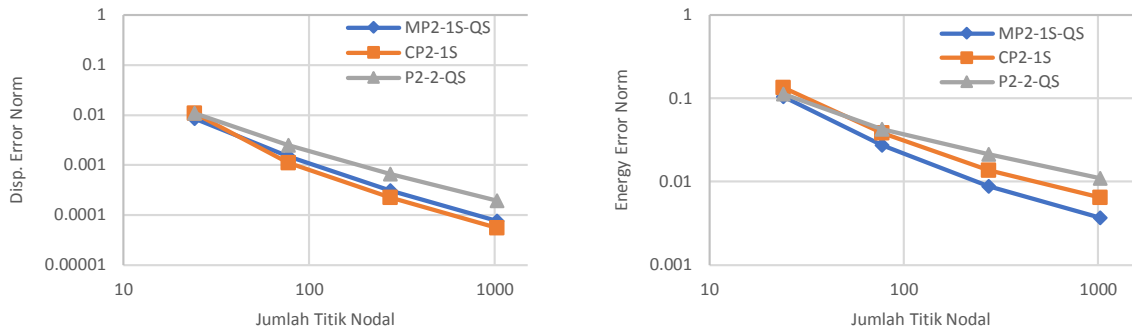
8. BALOK KANTILEVER

Balok kantilever yang diambil dari (Wong & Kanok-Nukulchai, 2009) dibebani beban terdistribusi parabola pada ujung kanan balok seperti pada **Gambar 4** dibagi menjadi 4 yaitu *mesh* dengan 24, 77, 273 dan 1025 titik nodal. Balok dianalisis dalam keadaan *plane-stress*, dengan menggunakan basis polinom *quadratic*. Jumlah layer yang digunakan adalah satu *layer selective* untuk MEH-K Modifikasi dan Trig3-CNS, yaitu menggunakan satu *layer node patch*, namun bila ada titik nodal yang *node patch* berisikan kurang dari 7 titik maka titik nodal tersebut akan menggunakan dua *layer node patch*. Fungsi korelasi yang digunakan adalah *quartic spline* dengan *theta* berbeda-beda setiap *central node*. Contoh *mesh* 273 dapat dilihat pada **Gambar 4**.



Gambar 4. Parameter Bahan Balok Kantilever dan Contoh *Mesh* 273 Titik Nodal

Solusi analitis untuk balok ini dapat dilihat pada (Wong & Kanok-Nukulchai, 2009) dan tebal balok dianggap satu unit.

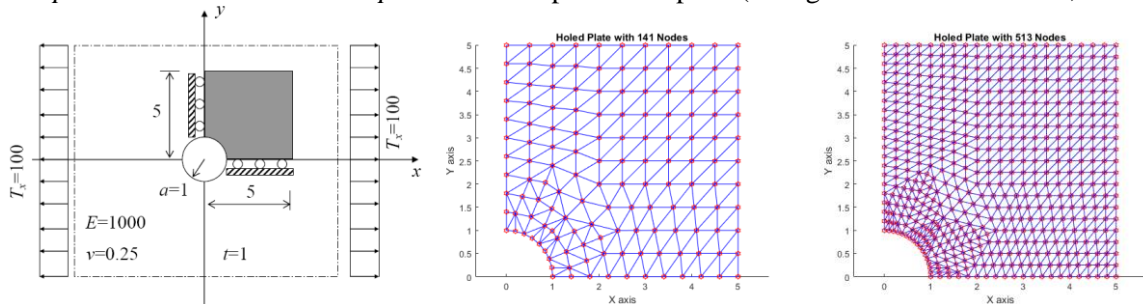


Gambar 5. Grafik *Relative Displacement* dan *Energy Error* Balok Kantilever

Dengan pengaturan satu *layer selective* MEH-K Modifikasi dapat memberikan hasil yang mendekati eksak dengan diperhalusnya *mesh*. Untuk hasil *displacement error* Trig3-CNS memiliki *error* yang paling rendah, sedangkan dari hasil *energy error* MEH-K Modifikasi merupakan yang paling akurat dan memiliki laju konvergensi yang hampir sama seperti yang terlihat pada **Gambar 5**.

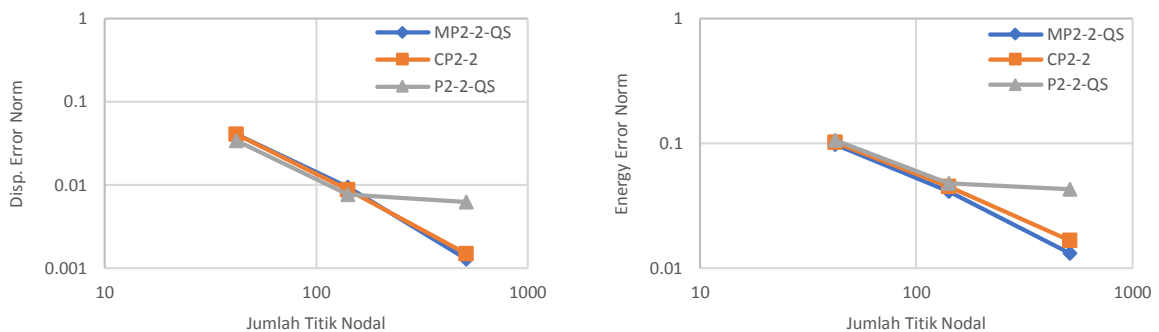
9. PELAT TAK HINGGA BERLUBANG

Pelat tak hingga berlubang yang diambil dari (Wong & Kanok-Nukulchai, 2009) menerima beban tarik seperti yang telah ditunjukkan pada **Gambar 6**. Dikarenakan bentuknya yang simetris, hanya diambil bagian atas kanan dari pelat untuk dianalisa dalam keadaan *plane-stress* dan menggunakan fungsi korelasi *quartic spline*. Digunakan basis polinom kuadrat dengan nilai *theta* bervariasi pada setiap *node patch*. Solusi analitis untuk *problem* ini dapat dilihat pada (Wong & Kanok-Nukulchai, 2009).



Gambar 6. Parameter Bahan Pelat Tak Hingga dan Contoh *Mesh* 141 dan 513 Titik Nodal

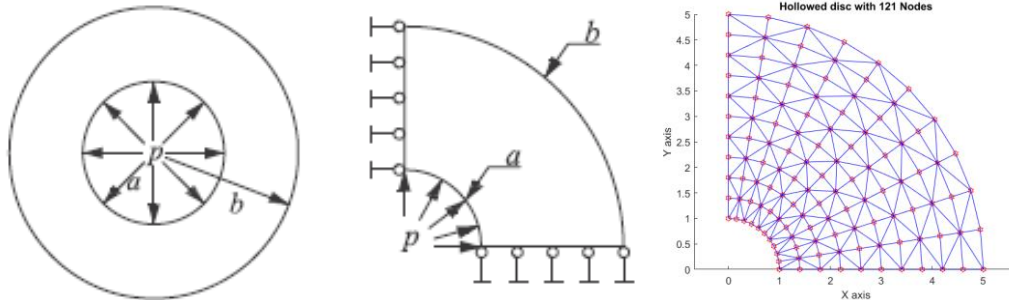
Dari **Gambar 7** dapat dilihat bahwa MEH-K Modifikasi bersifat konvergen karena hasil semakin mendekati nilai eksak seiring dengan diperhalusnya *mesh*. Ketiga *shape function* memiliki nilai *relative error* yang hampir mirip. Namun, pada *mesh* 513 MEH-K tidak seakurat Trig3-CNS dan MEH-K Modifikasi. Secara umum Trig3-CNS dan MEH-K modifikasi memiliki akurasi yang sama, namun MEH-K Modifikasi sedikit lebih unggul.



Gambar 7. Grafik *Relative Displacement* dan *Energy Error* Pelat Tak Hingga Berlubang

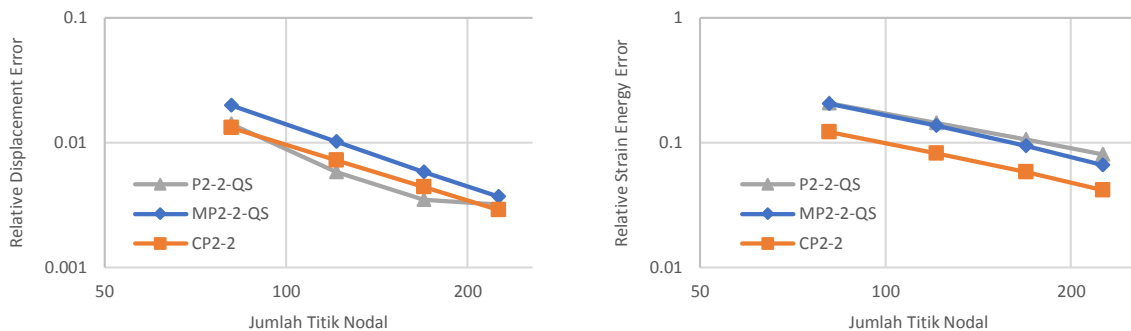
10. PIRINGAN BERLUBANG DENGAN TEKANAN INTERNAL

Problem yang diambil dari (Yang, Tang, & Zheng, 2014) ini adalah sebuah cakram seperti pada **Gambar 8** dengan jari-jari dalam $a = 1$, jari-jari luar $b = 5$, dan tebal sebesar satu unit dibebani $p = 1$ pada sisi dalam ($r = a$), sedangkan sisi luar ($r = b$) tidak diberi beban apa-apa. Dikarenakan bentuknya yang simetris, hanya seperempat bagian dari cakram yang akan dimodelkan dalam kondisi *plane-stress*.



Gambar 8. Piringan Berlubang yang Menerima Tekanan Internal dan Contoh *Mesh* 121 Titik Nodal

Solusi analitis dapat dilihat pada (Zheng, Wu, Tang, & Zhang, 2010) dengan parameter bahan $E = 1 \times 10^3$ dan $\nu = 0.25$. Digunakan 4 macam *mesh* yaitu 81, 121, 169 dan 225 titik nodal dengan contoh pada **Gambar 8**.

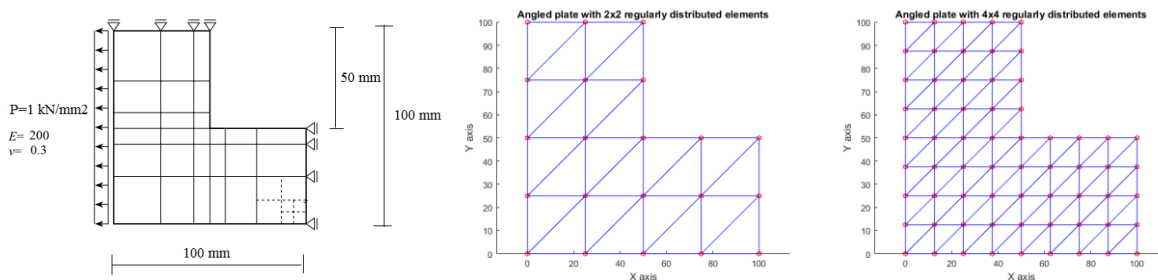


Gambar 9. Grafik *Relative displacement* dan *Energy Error* Piringan Berlubang

Bila dibandingkan MEH-K Modifikasi, Trig3-CNS dan MEH-K ketiganya memiliki laju konvergensi yang hampir sama, namun dalam hal akurasi Trig3-CNS merupakan yang paling akurat jika ditinjau dari *energy error norm*, dan tidak ada perbedaan yang signifikan antara MEH-K dan MEH-K Modifikasi seperti yang dapat dilihat pada **Gambar 9**.

11. PELAT SIKU

Untuk mempelajari pengaruh singularitas terhadap kekonvergensi MEH-K modifikasi maka dilakukan pengujian terhadap pelat berbentuk siku (Wong, Widjaja, & Soetanto, 2016) seperti diperlihatkan pada **Gambar 10**. Struktur pelat ini dimodelkan dengan *mesh* 1x1, 2x2, 4x4, dan 8x8 seperti pada **Gambar 10**.



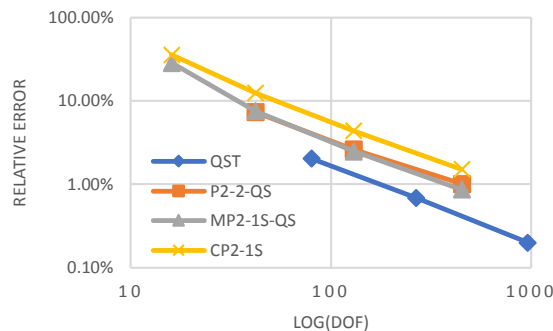
Gambar 10. Parameter Bahan Pelat Siku dan Contoh *Mesh* 2x2 dan 4x4

Energi regangan dari struktur dicari dan dibandingkan dengan hasil eksak sehingga dapat mengetahui seberapa besar tingkat kesalahannya dan bagaimana karakteristik konvergensinya. Hasil-hasil pengujian berupa *strain energy* dan kesalahan relatifnya didaftarkan pada **Tabel 1**. Karena pelat siku ini tidak terdapat solusi energi eksaknya, maka untuk referensi diambil energi regangan hasil dari analisis dengan *mesh* terhalus elemen QST yaitu sebesar 77.7079.

Tabel 1. Hasil Energi Regangan Pelat Siku dan Kesalahan Relatifnya

<i>Element Type</i>	<i>Mesh</i>	<i>DOF</i>	<i>Strain Energy</i>	<i>Relative error (%)</i>
P2-2-QS	2x2	42	72.0127	7.33%
	4x4	130	75.6724	2.62%
	8x8	450	76.9216	1.01%
MP2-1S-QS	1x1	16	55.4535	28.64%
	2x2	42	71.8434	7.55%
	4x4	130	75.7739	2.49%
	8x8	450	77.034	0.87%
CP2-1S-QS	1x1	16	49.8704	35.82%
	2x2	42	68.019	12.47%
	4x4	130	74.3111	4.37%
	8x8	450	76.5282	1.52%

Hasil dari MEH-K Modifikasi dan Trig3-CNS akurat ketika menggunakan satu *layer selective* dan tidak terjadi diskontinuitas pada *mesh* 8x8. Dari **Tabel 1** dan **Gambar 11** terlihat bahwa akurasi dan laju konvergensi ketiga elemen hampir sama, sehingga tidak ada peningkatan performa terhadap pengaruh *singularity* pada MEH-K Modifikasi.



Gambar 11. Grafik Kesalahan Energi Regangan vs. Jumlah DOF Pelat Siku

12. KESIMPULAN

MEH-K Modifikasi menunjukkan sifat konvergen, dimana hasil mendekati nilai eksak jika jumlah *mesh* diperbanyak atau diperhalus dan secara keseluruhan dapat memberikan hasil yang lebih baik dari MEH-K. Namun demikian, MEH-K Modifikasi tidak lolos *patch test* begitu pula halnya dengan Trig3-CNS yang sudah kontinu karena tidak dapat memberikan hasil yang eksak sehingga perlu dilakukan pemeriksaan terhadap kestabilan matriks kekakuan MEH-K Modifikasi. Perlu diteliti lebih lanjut untuk *benchmark problem* balok kantilever dan pelat siku karena hanya bisa konvergen pada saat menggunakan satu *layer* selektif.

13. DAFTAR REFERENSI

- Babuška, I., & Melenk, J. M. (1997). The Partition of Unity Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 727-758.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., & Witt, R. J. (2002). *Concept and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken.
- Gu, L. (2003). Moving Kriging Interpolation and Element-Free Galerkin Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56, 1-11.

- Plengkhom, K., & Kanok-Nukulchai, W. (2005). An Enhancement of Finite Element Methods with Moving Kriging Shape Functions. *International Journal. Computational Methods.*, 2, 451-472.
- Wong, F. T., & Kanok-Nukulchai, W. (2006a). Kriging-Based Finite Element Method for Analyses of Reissner-Mindlin Plates. *The Tenth East-Asia Pacific Conference on Structural Engineering and Construction*. Keynote Lectures and Symposia, Bangkok, 509-514.
- Wong, F. T., & Kanok-Nukulchai, W. (2006b). On Alleviation of Shear Locking in the Kriging-Based Finite Element Method. *Civil Eng. Conf. "Towards Sustainable Engineering Practice"*, Surabaya, 39-47.
- Wong, F. T., & Kanok-Nukulchai, W. (2009). On the Convergence of the Kriging-Based Finite Element Method. *International Journal of Computational Methods*, 93-118.
- Wong, F. T., Widjaja, K., & Soetanto, R. M. (2016). Studi Keakuratan dan Kekonvergenan Metode Elemen Hingga Berbasis Kriging dan Konvensional. *Seminar dan Pameran HAKI*, Jakarta, 25.
- Yang, Y., Tang, X., & Zheng, H. (2014). A Three-Node Triangular Element with Continuous Nodal Stress. *Computers and Structures* 141, 46-58.
- Zheng, C., Wu, S. C., Tang, X. H., & Zhang, J. H. (2010). A Novel Twice-Interpolation Finite Element Method. *Acta Mechanica Sinica* 26, 265-278.
- Zienkiewicz, O., & Taylor, R. (2000). *The Finite Element Method. 5th ed.*, Butterworth-Heinemann, Oxford.