

# PENGEMBANGAN ELEMEN BALOK TIMOSHENKO *DISCRETE SHEAR GAP* STANDAR DAN BERBASIS KRIGING UNTUK ANALISIS GETARAN BEBAS DAN TEKUK

Nelvin Tanoyo<sup>1</sup>, Tonny Christanto Gosaria<sup>2</sup> dan Wong Foek Tjong<sup>3</sup>

**ABSTRAK :** Penyelesaian masalah perhitungan struktur umumnya menggunakan metode analitis, tetapi untuk analisis struktur yang rumit metode analitis menjadi tidak efektif lagi, sehingga metode numerik adalah solusi dari masalah tersebut, salah satu metode numerik yang paling populer adalah metode elemen hingga (MEH). Selain MEH standar terdapat juga MEH berbasis Kriging (MEH-K) dimana *shape function* yang digunakan adalah *shape function* Kriging. Dengan teknik *discrete shear gap* (DSG) fenomena *shear locking* yang terjadi pada balok Timoshenko telah berhasil dieliminasi untuk analisa statik. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengembangkan suatu elemen balok Timoshenko standar maupun berbasis Kriging dengan teknik DSG untuk analisis getaran bebas dan analisis tekuk. Menggunakan program MatlabR2010a peneliti menambahkan matriks massa untuk analisis getaran bebas dan matriks kekakuan geometrik untuk analisis tekuk, ke dalam program analisis statik elemen balok Timoshenko dari peneliti sebelumnya baik untuk MEH standar maupun MEH-K. Dari penelitian ini, didapatkan bahwa pada elemen balok Timoshenko standar maupun berbasis Kriging menghasilkan hasil yang sangat akurat, baik untuk analisis getaran bebas maupun tekuk.

**KATA KUNCI:** metode elemen hingga (MEH), metode elemen hingga berbasis Kriging (MEH-K), *discrete shear gap* (DSG), balok Timoshenko, getaran bebas, tekuk

## 1. PENDAHULUAN

Metode Elemen Hingga telah banyak digunakan sebagai salah satu metode numerik dalam menyelesaikan permasalahan yang terjadi pada perhitungan struktur selama beberapa dekade terakhir ini. Dalam studi ini, penulis akan menggunakan metode elemen hingga standar dan metode elemen hingga berbasis Kriging (MEH-K). Penerapan MEH pada balok, pelat, dan cangkang sering kali terjadi permasalahan yang disebut dengan *shear locking*. Fenomena ini adalah suatu kondisi di mana suatu elemen sangat kaku ketika bentangnya semakin panjang atau semakin langsing. Terdapat metode yang diajukan untuk mengatasi fenomena ini yaitu metode *discrete shear gap* (DSG), ide dasar dari DSG adalah menghitung *shear gap* di titik nodal yang ditinjau dengan mengintegrasikan regangan geser (Bletzinger et al., 2000). Elemen hasilnya pun didapati bebas dari *locking*. Hal tersebut dapat dibuktikan dalam penelitian (Sugianto, 2016), tentang penggunaan teknik DSG yang diaplikasikan pada MEH standar untuk mengeliminasi fenomena *shear locking* pada balok. Pada penelitian tersebut fenomena *shear locking* dapat dieliminasi dengan baik. Tidak hanya terjadi pada MEH standar pada MEH-K pun, *shear locking* pun masih terjadi. Pada penelitian (Sulistio, 2014; Wong, Sulistio, & Syamsoeyadi, 2016), MEH-K dengan teknik DSG berhasil mengeliminasi fenomena *shear locking*, tetapi hanya berlaku untuk *shape function cubic*. Kemudian pada penelitian (Santoso, Sutrisno, & Wong; 2016) menyempurnakan penelitian sebelumnya dengan memodifikasi teknik DSG berbasis Kriging. Pada penelitian tersebut menunjukkan elemen balok yang *locking free* dan menunjukkan hasil yang konvergen dan tingkat akurasi yang semakin tinggi jika menggunakan orde yang semakin tinggi dan jumlah elemen yang semakin banyak untuk beragam ketebalan balok. Pendistribusian gaya dalam untuk deformasi, rotasi,

---

<sup>1</sup> Mahasiswa Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, zerosaber4@gmail.com

<sup>2</sup> Mahasiswa Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, tonnygosaria@gmail.com

<sup>3</sup> Dosen Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, wftjong@petra.ac.id

dan momen lentur dalam beragam variasi beban menunjukkan hasil yang mendekati hasil eksaknya untuk orde tertinggi dengan beragam jumlah elemen. Sedangkan, untuk gaya gesernya menunjukkan hasil berbentuk *piecewise constant*, seperti yang telah diharapkan. Hanya saja analisis pada penelitian ini terbatas dengan analisis statik, sehingga perlu dikembangkan untuk analisis dinamik terkhusus untuk getaran bebas dan analisis terhadap adanya gaya aksial dan fenomena tekuk. Oleh sebab itu, penulis ingin melanjutkan penelitian tersebut untuk analisis dinamik terkhusus untuk getaran bebas, analisis terhadap adanya gaya aksial dan fenomena tekuk serta membandingkan dengan metode MEH standar.

## 2. PERSAMAAN GERAK BALOK TIMOSHENKO

Asumsi dasar dari balok Timoshenko adalah bidang datar tetap datar setelah mengalami lendutan tetapi tidak perlu berarah normal terhadap garis netralnya (Reddy, 2006 seperti dikutip dalam Sulistio, 2014). Oleh karena itu, regangan geser dalam balok Timoshenko juga diperhitungkan. Dalam teori ini perpindahan hanya ditinjau untuk arah  $x$  dan arah  $z$ . Perpindahan untuk arah  $x$  dan arah  $z$  dapat ditulis sebagai berikut:

$$u = -z\theta(x) \quad (1a)$$

$$w = w(x) \quad (1b)$$

Dimana  $u$  adalah perpindahan aksial yang sejajar arah balok,  $w$  adalah perpindahan lateral yang tegak lurus arah balok, dan  $\theta$  adalah rotasi penampang balok. Komponen regangan yang tidak nol ditentukan berdasarkan persamaan sebagai berikut:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = -z \frac{d\theta}{dx} = -z\theta_{,x} \quad (2a)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx} - \theta = w_{,x} - \theta \quad (2b)$$

Dimana  $\varepsilon_{xx}$  adalah regangan akibat momen lentur dan  $\gamma_{xz}$  adalah regangan akibat gaya geser. Tanda koma berarti turunan parsial pertama terhadap variabel disebelahnya. Persamaan gerak balok dapat dibentuk melalui *Principle of virtual Displacement*, yang membentuk persamaan bentuk lemah dari balok Timoshenko, yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\int_0^L \delta\theta_{,x} EI \theta_{,x} dx + \int_0^L (\delta w_{,x} - \delta\theta) GA_s (w_{,x} - \theta) dx + \int_0^L \delta w \rho A \ddot{w} dx + \int_0^L \delta\theta \rho I \ddot{\theta} dx + \int_0^L \delta w_{,x} P w_{,x} dx = \int_0^L \delta w q dx + \int_0^L \delta\theta m dx \quad (3)$$

Gaya momen dan geser dapat dihitung melalui defleksi  $w$  dan rotasi  $\theta$ , melalui persamaan berikut:

$$M = E I \theta_{,x} \quad (4a)$$

$$Q = k G A \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) + P \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (4b)$$

## 3. PERUMUSAN BALOK TIMOSHENKO

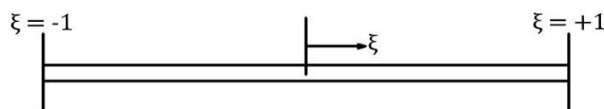
Pada suatu balok Timoshenko, ditinjau suatu elemen. Fungsi perpindahan dalam elemen tersebut dapat ditulis sebagai berikut:

$$w = [N_w] \{d\} \quad (5)$$

$$\theta = [N_\theta] \{d\} \quad (6)$$

dimana  $N_w = [N_1 \ 0 \ N_2 \ 0 \ \dots \ N_n \ 0]$  dan  $N_\theta = [0 \ N_1 \ 0 \ N_2 \ \dots \ 0 \ N_n]$  yang masing-masing adalah *shape function* yang menghubungkan perpindahan titik nodal elemen ( $w$  dan  $\theta$ ) dengan perpindahan titik nodal struktur  $d = \{w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2 \ \dots \ w_n \ \theta_n\}^T$ ,  $n$  adalah jumlah *node* dalam elemen balok. Pada **Gambar 1.**, dengan menggunakan konsep *isoparametric mapping*, terjadi interpolasi kordinat yaitu dengan mengubah variabel  $x$  menjadi variabel dalam *natural coordinate system*  $\xi$ , dapat juga ditulis sebagai berikut:

$$x = [N_x] \{c\} \quad (7)$$



Gambar 1. Hubungan Variabel  $x$  dengan Variabel Sistem Koordinat Alami  $\xi$

Pada **Tabel 1.** *shape function* yang digunakan pada elemen linear, kuadrat, dan kubik dalam *natural coordinate system* menjadi sebagai berikut:

**Tabel 1. Shape Function untuk Elemen Linear (2 node), Kuadrat (3 node), dan Kubik (4 node)**

Node yang digunakan	Node 1 & Node 2	+ Node 3	+ Node 3 & Node 4
$N_1$	$\frac{1}{2}(1 - \xi)$	$-\frac{1}{2}(1 - \xi^2)$	$+\frac{1}{16}(-9\xi^3 + \xi^2 + 9\xi - 1)$
$N_2$	$\frac{1}{2}(1 + \xi)$	$-\frac{1}{2}(1 - \xi^2)$	$+\frac{1}{16}(9\xi^3 + \xi^2 - 9\xi - 1)$
$N_3$	$(1 - \xi^2)$		$+\frac{1}{16}(27\xi^3 + 7\xi^2 - 27\xi - 7)$
$N_4$	$\frac{1}{16}(-27\xi^3 - 9\xi^2 + 27\xi + 9)$		

Untuk Meh-K, menggunakan interpolasi Kriging, kita dapat mengetahui titik-titik lain yang tidak diketahui dengan interpolasi dari titik-titik yang telah diketahui di sekitarnya. Dalam sebuah domain 1 dimensi  $\Omega$ , terdapat sejumlah titik – titik  $x_I$ ,  $I=1, 2, \dots, N$ , dimana  $N$  merupakan jumlah dari titik – titik nodal di sepanjang domain tersebut dan fungsi dari nilai  $x_I$  tersebut dapat dinyatakan sebagai  $u(x_I)$ . Untuk sebuah titik sembarang  $x$ , nilai dari  $u(x)$  diasumsikan dipengaruhi oleh titik – titik di sekitarnya dalam sebuah subdomain yang diberi nama *domain of influence* (DOI). Untuk rumus selengkapnya dapat dilihat pada Syamsoeyadi (2009), Wong F.T., Syamsoeyadi H. (2011), dan Wong et al (2016). Kemudian terdapat matriks perpindahan-regangan terhadap *displacement* ( $B_w$ ) dan rotasi ( $B_\theta$ ) yaitu sebagai berikut:

$$B_w = [J]^{-1} [N_{1,\xi} \ 0 \ N_{2,\xi} \ 0 \ \dots \ N_{n,\xi} \ 0] \quad (8)$$

$$B_\theta = [J]^{-1} [0 \ N_{1,\xi} \ 0 \ N_{2,\xi} \ \dots \ 0 \ N_{n,\xi}] \quad (9)$$

Persamaan gerak untuk elemen balok Timoshenko adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{d}}(t) + [\mathbf{k} + P \mathbf{k}_g] \mathbf{d}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (10)$$

Masing-masing matriks  $[k]$  dan  $\{f\}$  tersebut dinyatakan dalam persamaan:

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^1 \mathbf{B}_\theta^T E I \mathbf{B}_\theta J d\xi + \int_{-1}^1 (\mathbf{B}_w - \mathbf{N}_\theta)^T G A_s (\mathbf{B}_w - \mathbf{N}_\theta) J d\xi \quad (11a)$$

$$\mathbf{f} = \int_{-1}^1 \mathbf{N}_w^T q J d\xi + \int_{-1}^1 \mathbf{N}_\theta^T m J d\xi \quad (11b)$$

$$\mathbf{m} = \int_{-1}^1 \mathbf{N}_w^T \rho A \mathbf{N}_w J d\xi + \int_{-1}^1 \mathbf{N}_\theta^T \rho I \mathbf{N}_\theta J d\xi \quad (11c)$$

$$\mathbf{k}_g = \int_{-1}^1 \mathbf{B}_w^T \mathbf{B}_w J d\xi \quad (11d)$$

Pada perhitungan secara struktur, elemen-elemen pada balok perlu dirakit (*assembly*) menjadi satu sistem struktur sehingga persamaan (10) menjadi:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{D}}(t) + [\mathbf{K} + P \mathbf{K}_g] \mathbf{D}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (12)$$

Untuk analisis getaran bebas, gaya luar dapat dianggap nol sehingga persamaan di atas dapat ditulis menjadi :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{D}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{D}(t) = \mathbf{0} \quad (13)$$

Sedangkan untuk analisa pengaruh terhadap gaya aksial atau analisa tekuk, percepatan struktur dianggap nol, sehingga persamaannya menjadi :

$$[\mathbf{K} + P \mathbf{K}_g] \mathbf{D}(t) = \mathbf{F} \quad (14)$$

Lalu untuk mencari gaya aksial kritis yang membuat terjadinya tekuk pada balok ( $P_{cr}$ ), dianggap gaya luar yang bekerja pada balok sama dengan nol, sehingga terbentuk persamaan *eigen* sebagai berikut:

$$[\mathbf{K} + P \mathbf{K}_g] \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (15)$$

Dimana nilai  $P_{cr}$  didapatkan dari nilai *eigen value* positif terkecil, dan nilai *eigen vector* yang bersangkutan adalah perpindahan balok setelah berdeformasi akibat tekuk. Untuk analisa getaran bebas, gaya luar yang bekerja pada balok dianggap nol, sehingga persamaannya dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{D}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{D}(t) = \mathbf{0} \quad (16)$$

Gerakan sebuah struktur dengan frekwensi getar alami  $\omega$  dapat dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{D}_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (17a)$$

Apabila persamaan (12) diturunkan terhadap waktu sebanyak dua kali, akan menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$\ddot{\mathbf{D}}(t) = -\omega^2 \mathbf{D}_0 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \mathbf{D}(t) \quad (17b)$$

Substitusi dari persamaan (17b) ke persamaan (16) dapat dituliskan menjadi:

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{D}_0 \sin(\omega t + \varphi) + \mathbf{K} \mathbf{D}_0 \sin(\omega t + \varphi) = \mathbf{0} \quad (17c)$$

Persamaan (17c) adalah persamaan gerak untuk menganalisa getaran bebas pada suatu struktur dengan banyak derajat kebebasan tanpa redaman (*undamped multi degree of freedom system*). Apabila diasumsikan nilai  $\sin(\omega t + \varphi) \neq 0$ , dan persamaan diatas diubah menjadi permasalahan eigen, maka persamaan tersebut menjadi sebagai berikut :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{D}_0 = \mathbf{0} \quad (18)$$

di mana:  $\omega^2 = \text{eigen value}$

$\mathbf{D}_0 = \text{eigen vector}$

Penyelesaian dari persamaan eigen di atas menghasilkan nilai-nilai eigen  $\omega^2$  dan vektor-vektor eigen  $\mathbf{D}_0$ , dimana  $\omega^2$  adalah kuadrat dari frekwensi getar alami struktur, dan  $\mathbf{D}_0$  adalah bentuk ragam (*mode shape*) getaran.

#### 4. TEKNIK DISCRETE SHEAR GAP

Teknik *discrete shear gap* (DSG) bertujuan untuk mensubstitusi regangan geser balok dengan regangan geser yang didapat dari mendiferensialkan fungsi DSG (Bischoff et al., 2003; Bletzinger et al., 2000). Persamaan deformasi geser dapat diperoleh dari mengintegtralkan persamaan (2b):

$$\Delta w_\gamma(x) = \int_{x_0}^x \gamma dx = w|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x \theta dx \quad (19)$$

Dimana  $\Delta w_\gamma(x)$  adalah selisih antara total perpindahan ( $\Delta w$ ) dan perpindahan yang diakibatkan oleh lentur ( $\Delta w_b$ ) atau disebut *shear gap*. Kemudian *Discrete Shear Gap* didapat dari *shear gap* yang dihitung pada titik nodal ke- $i$  ( $\Delta w_{\gamma i}$ ).

$$\Delta w_{\gamma i} = \int_{x_0}^{x_i} \gamma_h dx = w|_{x_0}^{x_i} - \int_{x_0}^{x_i} \theta dx \quad (20)$$

Nilai *shear gap* diantara titik-titik nodal dapat diperoleh melalui interpolasi nilai *shear gap* pada titik nodal, dengan demikian persamaannya dapat ditulis menjadi:

$$\Delta \bar{w}_\gamma(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) \Delta w_{\gamma i} \quad (21)$$

Kemudian nilai regangan geser diperoleh dengan mendiferensialkan persamaan (21).

$$\bar{\gamma}(x) = \bar{\gamma}_{DSG} = \sum_{i=1}^n N_{i,x}(x) \Delta w_{\gamma i} \quad (22)$$

Pada penelitian ini, nilai DSG hanya dihitung pada titik nodal elemen yang ditinjau, sehingga persamaan (27) menjadi:

$$\bar{\gamma}_{DSG} = \sum_{i=1}^2 N_{i,x} \Delta w_{\gamma i} = \bar{\mathbf{B}}_{\gamma 1} \mathbf{w}_\gamma \quad (23a)$$

Dimana:

$$\bar{\mathbf{B}}_{\gamma 1} = [N_{i,x} \quad N_{(i+1),x}] \quad (23b)$$

$$\mathbf{w}_\gamma = [\Delta w_{\gamma i} \quad \Delta w_{\gamma(i+1)}]^T \quad (23c)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (22) ke persamaan (20) maka akan didapat persamaan:

$$\Delta w_{\gamma i} = w_i - w_1 - \left( \int_{x_0}^{x_i} \mathbf{N}_\theta(x) dx \right) \mathbf{d} \quad (24)$$

Sehingga persamaan (23c) dapat menjadi:

$$\mathbf{w}_\gamma = \bar{\mathbf{B}}_{\gamma 2} \mathbf{d} \quad (25a)$$

Dimana:

$$\bar{\mathbf{B}}_{\gamma 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & -\int_{x_1}^{x_2} N_1 dx & 1 & -\int_{x_1}^{x_2} N_2 dx & 0 & -\int_{x_1}^{x_2} N_3 dx & \dots & 0 & -\int_{x_1}^{x_2} N_n dx \\ -1 & -\int_{x_1}^{x_3} N_1 dx & 0 & -\int_{x_1}^{x_3} N_2 dx & 1 & -\int_{x_1}^{x_3} N_3 dx & \dots & 0 & -\int_{x_1}^{x_3} N_n dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -\int_{x_1}^{x_n} N_1 dx & 0 & -\int_{x_1}^{x_n} N_2 dx & 0 & -\int_{x_1}^{x_n} N_3 dx & \dots & 1 & -\int_{x_1}^{x_n} N_n dx \end{bmatrix} \quad (25b)$$

$$\mathbf{d} = \{w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2\}^T \quad (25c)$$

Substitusi persamaan (25a) ke persamaan (23a) maka akan didapat persamaan:

$$\bar{Y}_{DSG} = \bar{\mathbf{B}}_{\gamma 1} \bar{\mathbf{B}}_{\gamma 2} \mathbf{d} = \bar{\mathbf{B}}_{\gamma} \mathbf{d} \quad (26)$$

Dalam penelitian ini, matriks  $\bar{\mathbf{B}}_{\gamma 1}$  menggunakan *shape function linear* dan matriks  $\bar{\mathbf{B}}_{\gamma 2}$  hanya diambil 2 baris yang berhubungan dengan titik elemen yang ditinjau yaitu baris ke- $i$  dan baris ke- $(i+1)$ . Kemudian dengan mengganti matriks  $\mathbf{B}_{\gamma}$  pada persamaan (11a) dengan matriks  $\bar{\mathbf{B}}_{\gamma}$  pada persamaan (26), maka persamaan umum matriks kekakuan balok Timoshenko untuk MEH-K dengan DSG menjadi:

$$\mathbf{k} = \int_0^{L_e} \mathbf{B}_{\theta}^T EI \mathbf{B}_{\theta} dx + \int_0^{L_e} \bar{\mathbf{B}}_{\gamma}^T GA_s \bar{\mathbf{B}}_{\gamma} dx \quad (27)$$

## 5. HASIL PERHITUNGAN NUMERIK

Pada penelitian yang telah dilakukan Sulistio (2013), dilakukan analisa getaran bebas terhadap balok yang memiliki perletakan sendi-sendi dan jepit-jepit dengan  $L=10$  m,  $b=1$  m,  $E=2 \times 10^9$  kg/m<sup>2</sup>,  $\nu=0.3$ ,  $\rho=10$  kg/m<sup>3</sup>. Balok yang dianalisa memiliki ketebalan  $h/L$  yaitu 0.001 untuk analisa getaran bebas. Hasil analisa akan dinyatakan dalam frekuensi tak berdimensi  $\lambda$  yang didapatkan dari persamaan:

$$\lambda = \sqrt{\omega L^2 \sqrt{\frac{m}{EI}}} \quad (28)$$

Sedangkan untuk gaya tekan kritis digunakann  $L/h = 10$  dan  $L/h = 10000$ , hasil analisa akan dibandingkan dengan solusi eksak  $P_{cr}$  untuk balok Timoshenko menurut Kosmatka (1995) dinyatakan sebagai berikut :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{eff}^2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EI}{L_{eff}^2 kGA}} \right\} \quad (29)$$

Pada penelitian A. Shahba al (2011) dilakukan penelitian pada balok taper dengan data sebagai berikut:  $L = 10$  m ;  $\nu = 0.3$  ;  $A_o = 10$  m<sup>2</sup> ;  $I_o = 10$  m<sup>4</sup> ;  $r = 0.9$  (untuk analisa getaran bebas);  $r = 0.1$ , dan 0.9 (untuk analisa tekuk);

$$E(x) = 200E9 - 130E9 \left(\frac{x}{L}\right)^2 ; \rho(x) = 5700 - 2702 \left(\frac{x}{L}\right)^2 ;$$

$$A(x) = A_o \left(1 - r \frac{x}{L}\right) ; I(x) = I_o \left(1 - r \frac{x}{L}\right)^3 ;$$

Menurut Shahba et al (2011), Semua hasil frekuensi dari analisa getaran bebas pada bagian ini akan dikonversi kedalam bentuk frekuensi tak berdimensi  $\lambda$ , yang diperoleh dari persamaan:

$$\lambda = \omega \sqrt{\frac{\rho_o A_o L^4}{E_o I_o}} \quad (30)$$

Menurut Shahba et al (2011), solusi eksak berupa  $P$  kritis tanpa dimensi ( $\bar{P}$ ) untuk balok taper adalah sebagai berikut :

$$\bar{P} = \frac{P_{cr} L^2}{E_o I_o} \quad (31)$$

Hasil analisa dapat dilihat pada **Tabel 2** sampai dengan **Tabel 7**.

**Tabel 2. Perbandingan Frekuensi Tanpa Dimensi Metode Standar dengan Kriging untuk Balok S-3 (DSG) dan K-3-3-QS (DSG) dengan Perletakan Sendi-Sendi ( $h/L=0.001$ )**

Mode	Standar		Kriging	
	8 elemen	16 elemen	8 elemen	16 elemen
1	1.00000	1.00000	0.9999	1.0000
2	0.99997	0.99999	0.9996	0.9999
3	0.99987	0.99998	0.9984	0.9997
4	0.99965	0.99996	0.9980	0.9993

Dapat dilihat pada **Tabel 2** hasil analisis program menunjukkan hasil yang sangat mendekati eksak dengan ketelitian sebesar 99% untuk analisis balok dengan  $h/L=0.001$  dengan perletakan sendi-sendi.

**Tabel 3. Perbandingan Frekuensi Tanpa Dimensi Metode Standar dengan Kriging untuk Balok S-3 (DSG) dan K-3-3-QS (DSG) dengan Perletakan Jepit-Jepit ( $h/L=0.001$ )**

Mode	Standar		Kriging	
	8 elemen	16 elemen	8 elemen	16 elemen
1	0.99999	1.00000	0.9996	1.0000
2	0.99992	0.99999	0.9995	0.9998
3	0.99976	0.99997	1.0030	0.9994
4	0.99946	0.99993	1.0074	0.9989

Dapat dilihat pada **Tabel 3** hasil analisis program juga menunjukkan hasil yang sangat akurat untuk analisis balok dengan  $h/L=0.001$  dengan perletakan jepit-jepit.

**Tabel 4. Perbandingan Frekuensi Tanpa Dimensi Metode Standar dengan Kriging untuk Balok Tapered S-3 (DSG) dan K-3-3-QS (DSG) dengan Perletakan Sendi-Sendi ( $r=0.9$ )**

Mode	Standar		Kriging	
	8 elemen	16 elemen	8 elemen	16 elemen
1	0.995355	0.994745	0.989356	0.996656
2	0.996901	0.99639	0.988553	0.996919
3	0.996182	0.995622	0.994141	0.994437
4	0.994721	0.994049	1.016275	0.990544

Dapat dilihat pada **Tabel 4** hasil analisis program juga menunjukkan hasil dengan penyimpangan  $\pm 1\%$  jika disbanding dengan hasil referensi oleh Shahba et al (2011) untuk analisis balok *tapered* dengan  $r=0.9$  dengan perletakan sendi-sendi.

**Tabel 5. Perbandingan Frekuensi Tanpa Dimensi Metode Standar dengan Kriging untuk Balok Tapered S-3 (DSG) dan K-3-3-QS (DSG) dengan Perletakan Jepit-Jepit ( $r=0.9$ )**

Mode	Standar		Kriging	
	8 elemen	16 elemen	8 elemen	16 elemen
1	0.998503	0.995427	1.050874	1.004015
2	0.998456	0.995452	1.049311	1.003261
3	0.997443	0.994659	1.040182	0.999619
4	0.995703	0.993017	1.014467	0.992345

Dapat dilihat pada **Tabel 5** hasil analisis program juga menunjukkan hasil yang mendekati hasil dari referensi oleh Shahba et al (2011) untuk analisis balok *tapered* dengan  $r=0.9$  dengan perletakan jepit-jepit.

**Tabel 6. Perbandingan Gaya Tekan Kritis ( $P_{cr}$ ) antara Balok Timoshenko Prismatik Standar dan Berbasis Kriging dengan Integrasi Kubik untuk Ketebalan  $L/h = 10$  dan  $L/h = 10000$  dengan Perletakan Sendi-Sendi dan Jepit-Jepit.**

Perletakan	$L/h$	Standar		Kriging	
		8	16	8	16
Sendi-Sendi	10	0.99997	1.00003	0.99941	0.99991
	10000	0.99700	0.99700	0.99700	0.99700
Jepit-jepit	10	0.99989	0.99999	0.98848	0.99827
	10000	1.00004	1.00004	0.99548	1.00004

Dapat dilihat pada **Tabel 6** bahwa hasil dari program dalam menganalisis balok Timoshenko dengan  $L/h = 10$  dan  $L/h = 10000$  menunjukkan hasil yang sangat mendekati nilai eksak, dengan analisis menggunakan MEH standar maupun MEH-K menunjukkan hasil dengan penyimpangan dibawah 1.5%.

**Tabel 7. Perbandingan Gaya Tekan Kritis ( $P_{cr}$ ) antara Balok Timoshenko *Tapered* Standar dan Berbasis Kriging dengan Integrasi Kubik untuk  $r=0.1$  dan  $r=0.9$  dengan Perletakan Sendi-Sendi dan Jepit-Jepit.**

Perletakan	$r$	Standar		Kriging	
		8	16	8	16
Sendi-Sendi	0.1	1.00466	1.00468	0.99491	0.99805
	0.9	0.98475	0.98050	1.03835	0.99119
Jepit-jepit	0.1	1.01279	1.01107	0.83360	1.63388
	0.9	0.98381	0.96657	0.74832	1.09783

Dapat dilihat pada **Tabel 7** hasil analisis program juga menunjukkan hasil yang mendekati hasil dari referensi oleh Shahba et al (2011) walaupun masih menggunakan 8 dan 16 elemen saja untuk analisis balok *tapered* dengan  $r=0.1$  dan  $r=0.9$  dengan perletakan jepit-jepit.

## 6. KESIMPULAN

Perhitungan numerik dengan MEH standar maupun MEH-K untuk analisis getaran bebas dan analisis tekuk dengan teknik DSG pada kasus balok prismatik maupun *tapered* dengan berbagai macam ketebalan dan perletakan telah memberikan hasil yang akurat, dan konvergen. Dari hasil penelitian didapatkan jumlah elemen optimal untuk analisis getaran bebas maupun analisis tekuk, dimana jumlah elemen optimal adalah jumlah elemen minimal yang dibutuhkan agar analisis menjadi sangat akurat atau mendekati nilai eksak. Untuk analisis balok prismatik jumlah elemen optimal untuk integrasi linear 32 elemen, kuadratik 16 elemen, dan kubik 8 elemen. Sedangkan untuk analisis balok *tapered* jumlah elemen optimal yang dibutuhkan untuk integrasi linear adalah 32 elemen, kuadratik dan kubik 16 elemen.

## 7. DAFTAR REFERENSI

- Bischoff, M., Koschnick, F., & Bletzinger, K. (2003). Stabilized DSG Elements - A New Paradigm in Finite Element Technology. In *Proc. 4th European LS-DYNA Users Conference*.
- Bletzinger, K., Bischoff, M., & Ramm, E. (2000). A Unified Approach for Shear-Locking-Free Triangular and Rectangular Shell Finite Elements. *Computers & Structures*, 75, 321–334.
- Kosmatka, J.B. (1995). An Improved Two-Node Finite Element for Stability and Natural Frequencies of Axial-Loaded Timoshenko Beams. *Computers & Structures*. 57(1), 141-149.
- Reddy, J. N. (2006). *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, Singapore.
- Santoso, S. W., & Sutrisno, M. (2017). *Modifikasi Teknik Discrete Shear Gap untuk Elemen Balok Timoshenko Berbasis Kriging dan Rekayasa Elemen Segitiga Pelat Reissner – Mindlin*. (TA No. 11012135/SIP/2016). Unpublished undergraduate thesis, Universitas Kristen Petra, Surabaya.
- Shahba, A., Attarnejad, R., Tavanie Marvie, M., Hajilar, S. (2011). Free Vibration and Stability Analysis of Axially Functionally Graded Tapered Timoshenko Beams with Classical and Non-classical Boundary Conditions. *Composites: Part B* 42, 801–808
- Sugianto, S. (2016). *Studi Teknik Discrete Shear Gap pada Elemen Balok Timoshenko dan Elemen Pelat Reissner-Mindlin*. (TA No. 11012086/SIP/2016). Unpublished undergraduate thesis, Universitas Kristen Petra, Surabaya.
- Sulistio, A. (2014). *Pengembangan Elemen Balok Timoshenko Berbasis Kriging Bebas Locking untuk Analisis Stabilitas dan Getaran Bebas*. (TA No. 11011926/SIP/2014). Unpublished undergraduate thesis, Universitas Kristen Petra, Surabaya.
- Syamsoeyadi, H. (2009). *Pengembangan Elemen Balok Timoshenko Berbasis Kriging untuk Analisis*

- Statik dan Getaran Bebas*. (TA No. 11011660/SIP/2009). Unpublished undergraduate thesis, Universitas Kristen Petra, Surabaya.
- Wong F.T., Syamsoeyadi H. (2011). Kriging-Based Timoshenko Beam Element for Static and Free Vibration Analyses. *Civil Engineering Dimension*, 13(1), 42-49.
- Wong, F. T., & Sugianto, S., (2016). Study of the Discrete Shear Gap Technique in Timoshenko Beam Elements. *Civil Engineering Dimension*, 19(1), 54-62.
- Wong, F. T., Sulistio, A., & Syamsoeyadi, H. (2016). Kriging-based Timoshenko Beam Elements with the Discrete Shear Gap Technique. *International Journal of Computational Methods*, (Under Review).