

MODIFIKASI TEKNIK DISCRETE SHEAR GAP PADA ELEMEN BALOK TIMOSHENKO BERBASIS KRIGING

Stevanus Wongso Santoso¹, Mellyssa Sutrisno² dan Wong Foek Tjong³

ABSTRAK : Metode elemen hingga berbasis Kriging (MEH-K) yang dikembangkan oleh Plengkhom & Kanok-Nukulchai adalah salah satu pengembangan dari metode elemen hingga (MEH). Seperti yang diperkirakan ternyata dalam analisis MEH-K untuk balok dan pelat lentur, fenomena *shear locking* masih terjadi. Adapun kesimpulan dari pengujian elemen balok Timoshenko yang menggunakan MEH-K dengan teknik *discrete shear gap* (DSG) berhasil mengeliminasi fenomena *shear locking*, tetapi hanya berlaku untuk *shape function cubic*. Adanya penelitian ini adalah untuk memodifikasi teknik DSG pada elemen balok Timoshenko berbasis Kriging agar bebas dari fenomena *shear locking*. Dari penelitian ini, didapatkan bahwa dengan memodifikasi teknik DSG, elemen balok Timoshenko berbasis Kriging dengan orde berapapun bebas dari fenomena *shear locking* yaitu menghasilkan nilai deformasi yang akurat dan nilai gaya geser yang berbentuk *piecewise constant*.

KATA KUNCI: metode elemen hingga berbasis kriging, *shear locking*, metode DSG, regangan geser, balok Timoshenko.

1. PENDAHULUAN

Salah satu metode analisis numerik yang paling umum digunakan untuk menyelesaikan permasalahan analisis struktur adalah metode elemen hingga (MEH). Seiring dengan berjalannya waktu, permasalahan analisis struktur berkembang menjadi semakin kompleks. Dalam hal ini, MEH standar dikembangkan untuk menyelesaikan masalah tersebut. Berbagai macam MEH-pun muncul, seperti: h-p *Finite Element Method* (Babuska & Guo, 1996), *Extended Finite Element Method* (Moes, Dolbow, & Belytschko, 1999), *Discontinuous Galerkin Methods* (Georgoulis, 2011), *Meshfree Method* (Hale & Baiz, 2012), metode elemen hingga berbasis Kriging (Plengkhom & Kanok-Nukulchai, 2005), dll. Dalam penelitian ini, penulis menggunakan MEH-K karena tidak diperlukannya titik nodal tambahan pada elemen untuk membuat *shape function* kuadrat dan kubik dan prosedur perhitungannya mirip dengan MEH standar. Namun ternyata dalam analisis MEH-K, fenomena *shear locking* masih terjadi. Berbagai macam teknik untuk mengeliminasi fenomena *shear locking* telah dikembangkan. Salah satu teknik yang cukup efektif adalah teknik *Discrete Shear Gap* (DSG) (Bischoff, Koschnick, & Bletzinger, 2003; Bletzinger, Bischoff, & Ramm, 2000). Ide dasar dari DSG adalah menghitung *shear gap* di titik nodal yang ditinjau dengan mengintegrasikan regangan geser (Bletzinger et al., 2000). *Shear gap* sendiri memiliki definisi selisih antara total lendutan dan lendutan yang diakibatkan oleh lentur, maka *shear gap* bisa disebut juga lendutan yang diakibatkan geser (Bischoff et al., 2003). Dalam penelitian (Sulistio, 2014; Wong, Sulistio, & Syamsoeyadi, 2016), MEH-K dengan teknik DSG berhasil mengeliminasi fenomena *shear locking*, tetapi hanya berlaku untuk *shape function cubic*. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk melanjutkan penelitian yang dilakukan oleh (Sulistio, 2014; Wong et al., 2016) dengan memodifikasi teknik DSG berbasis Kriging.

¹ Mahasiswa Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, stevanus_ws@yahoo.com

² Mahasiswa Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, mellsut@hotmail.com

³ Dosen Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, wftjong@petra.ac.id

2. PERSAMAAN GERAK BALOK TIMOSHENKO

Asumsi dasar dari balok Timoshenko adalah bidang datar tetap datar setelah mengalami lendutan tetapi tidak perlu berarah normal terhadap garis netralnya (Reddy, 2006 seperti dikutip dalam Sulistio, 2014). Oleh karena itu, regangan geser dalam balok Timoshenko juga diperhitungkan. Dalam teori ini perpindahan hanya ditinjau untuk arah x dan arah z . Perpindahan untuk arah x dan arah z dapat ditulis sebagai berikut:

$$u = -z\theta(x) \quad (1a)$$

$$w = w(x) \quad (1b)$$

Dimana u adalah perpindahan aksial yang sejajar arah balok, w adalah perpindahan lateral yang tegak lurus arah balok, dan θ adalah rotasi penampang balok. Komponen regangan yang tidak nol ditentukan berdasarkan persamaan sebagai berikut:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = -z \frac{d\theta}{dx} = -z\theta_{,x} \quad (2a)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx} - \theta = w_{,x} - \theta \quad (2b)$$

Dimana ε_{xx} adalah regangan akibat momen lentur dan γ_{xz} adalah regangan akibat gaya geser. Tanda koma berarti turunan parsial pertama terhadap variabel disebelahnya. Persamaan gerak balok dapat dibentuk melalui *Principal of virtual Displacement*, yang membentuk persamaan bentuk lemah dari balok Timoshenko, yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\int_0^L \delta\theta_{,x} EI \theta_{,x} dx + \int_0^L (\delta w_{,x} - \delta\theta) G A_s (w_{,x} - \theta) dx = \int_0^L \delta w q dx \quad (3)$$

Gaya momen dan geser dapat dihitung melalui defleksi w dan rotasi θ , melalui persamaan berikut:

$$M = E I \theta_{,x} \quad (4a)$$

$$Q = G A_s \gamma \quad (4b)$$

3. METODE ELEMEN HINGGA BERBASIS KRIGING

Teknik Interpolasi Kriging adalah teknik geostatistik yang populer digunakan untuk interpolasi di dalam ilmu geologi dan pertambangan (Tongsuk and Kanok-Nukulchai, 2004a; Gu, 2003; Olea, 1999, p. 8 seperti dikutip dalam Sulistio, 2014). Teknik ini ditemukan oleh seorang insiyur pertambangan Afrika Selatan bernama Danie G. Krige. Dengan menggunakan interpolasi ini, kita dapat mengetahui titik-titik lain yang tidak diketahui dengan interpolasi dari titik-titik yang telah diketahui di sekitarnya.

Dalam sebuah domain 1 dimensi Ω , terdapat sejumlah titik – titik $x_I, I=1, 2, \dots, N$, dimana N merupakan jumlah dari titik – titik nodal di sepanjang domain tersebut dan fungsi dari nilai x_I tersebut dapat dinyatakan sebagai $u(x_I)$. Untuk sebuah titik sembarang x , nilai dari $u(x)$ diasumsikan dipengaruhi oleh titik – titik di sekitarnya dalam sebuah subdomain yang diberi nama *domain of influence* (DOI)

Nilai $u(x)$ diasumsikan dapat dihitung dengan nilai estimasi u^h yang merupakan penjumlahan linier $u(x_1), \dots, u(x_N)$, sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i) \quad (5)$$

dimana λ_i adalah bobot Kriging masing-masing titik dalam DOI, dan n adalah jumlah titik dalam DOI. Nilai dari bobot Kriging λ_i didapatkan dengan menyelesaikan sistem persamaan Kriging sebagai berikut:

$$\mathbf{R} \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{P} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{r}(x) \quad (6a)$$

$$\mathbf{P}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{p}(x) \quad (6b)$$

Dimana:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} C(h_{11}) & \dots & C(h_{1n}) \\ \dots & \dots & \dots \\ C(h_{n1}) & \dots & C(h_{nn}) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & \dots & p_m(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ p_1(x_n) & \dots & p_m(x_n) \end{bmatrix} \quad (6c)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n]^T; \quad \boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \quad \dots \quad \mu_m]^T \quad (6d)$$

$$\mathbf{r}(x) = [C(h_{1x}) \quad C(h_{2x}) \quad \dots \quad C(h_{nx})]^T \quad (6e)$$

$$\mathbf{p}(x) = [p_1(x) \quad \dots \quad p_m(x)]^T \quad (6f)$$

Matriks \mathbf{R} , $C(h_{ij})$, adalah matriks kovarian berdimensi $n \times n$ antara $U(x_i)$ dan $U(x_j)$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$. Huruf U menunjukkan nilai dari fungsi $u(x)$ yang sudah ditentukan. Matriks \mathbf{P} adalah matriks berdimensi $n \times m$, m adalah *monomial terms*. Vektor $\boldsymbol{\lambda}$ adalah vektor $n \times 1$ dari *Kriging weights* dan vektor $\boldsymbol{\mu}$ adalah vektor $m \times 1$ dari vektor pengali Lagrange. Vektor $\mathbf{r}(x)$, $C(h_{ix})$, adalah vektor kovarian berdimensi $n \times 1$ antara titik nodal $U(x_i)$ dan titik yang ditinjau $U(x)$, dengan fungsi $h_{ix} = x - x_i$. Vektor $\mathbf{p}(x)$ adalah vektor berdimensi $m \times 1$ dari nilai monomial di titik x . Syarat mutlak agar persamaan Kriging dapat diselesaikan yaitu jumlah titik nodal yang terdapat di dalam DOI (n) harus sama atau lebih besar daripada jumlah dari *monomial terms* (m), $n \geq m$. *Monomial terms* dapat didapatkan berdasarkan dari *polynomial basis*. Berdasarkan *polynomial basis* juga, kita bisa mendapatkan jumlah lapisan minimumnya yang dapat dilihat pada **Tabel 1**.

Tabel 1. Tabel Polynomial Basis, Monomial Terms, m, dan Jumlah Lapisan Minimum

| <i>Polynomial Basis</i> | <i>Monomial Term</i> | <i>m</i> | Jumlah Lapisan Minimum |
|-------------------------|----------------------|----------|------------------------|
| Linear | $1 \ x$ | 2 | 1 |
| Kuadratik | $1 \ x \ x^2$ | 3 | 2 |
| Kubik | $1 \ x \ x^2 \ x^3$ | 4 | 3 |

Sumber: Wong et al. (2016, p. 5)

Perumusan dari nilai estimasi u^h dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut:

$$u^h(x) = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{d} = \mathbf{N}(x) \mathbf{d} \quad (7)$$

dimana $\mathbf{d} = [u(x_1) \ \dots \ u(x_n)]^T$ adalah vektor $n \times 1$ dari nilai titik nodal dan $\mathbf{N}(x) = \boldsymbol{\lambda}^T$ adalah matriks dari *shape function* Kriging. Demikian, bobot Kriging adalah *shape function* dari Kriging. Dalam pembentukan *shape function* Kriging dibutuhkan fungsi korelasi. Fungsi korelasi didefinisikan sebagai berikut:

$$\rho(h) = \frac{c(h)}{\sigma^2} \quad (8)$$

Menurut Gu (2003), nilai σ^2 tidak memiliki pengaruh pada hasil akhir sehingga dipakai nilai satu (Sulistio, 2014). Dalam penelitian ini dipilih 2 jenis fungsi korelasi yaitu fungsi korelasi Gauss dan *Quartic Spline*. Fungsi korelasi Gauss dan *Quartic Spline* dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\rho(h) = \exp\left(-\left(\theta_r \frac{h}{d}\right)^2\right) \quad (9a)$$

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 - 6\left(\theta_r \frac{h}{d}\right)^2 + 8\left(\theta_r \frac{h}{d}\right)^3 - 3\left(\theta_r \frac{h}{d}\right)^4 & \text{for } 0 \leq \theta_r \frac{h}{d} \leq 1 \\ 0 & \text{for } \theta_r \frac{h}{d} > 1 \end{cases} \quad (9b)$$

dimana h adalah jarak antara 2 titik nodal, d adalah jarak maksimum dari pasangan-pasangan titik nodal di DOI, dan $\theta_r > 0$ adalah parameter korelasi yang menentukan nilai dari *shape function* Kriging. Demikian, θ_r mempunyai batasan nilai bawah dan nilai atas menurut *polynomial basis* dan jumlah lapisan yang digunakan, sehingga disarankan menggunakan nilai rata-ratanya seperti pada **Tabel 2**.

Tabel 2. Besar θ_r Menurut Polynomial Basis dan Jumlah Lapisannya

| <i>Polynomial Basis</i> | Jumlah Lapisan | <i>Gauss</i> | | <i>Quatic Spline</i> | |
|-------------------------|----------------|--------------|-------------|----------------------|-------------|
| | | Batas Atas | Batas Bawah | Batas Atas | Batas Bawah |
| Linear | 1 | 0 | 0.2295 | 0 | 0.098 |
| | 2 | 10^{-4} | 1.0 | 10^{-5} | 0.44 |
| | 3 | 10^{-4} | 1.9 | 10^{-5} | 0.86 |
| Kuadratik | 2 | 10^{-4} | 1.0 | 10^{-5} | 0.44 |
| | 3 | 10^{-4} | 1.9 | 10^{-6} | 0.86 |
| Kubik | 3 | 10^{-4} | 1.9 | 10^{-4} | 0.86 |

Sumber: Wong et al. (2016, p. 7)

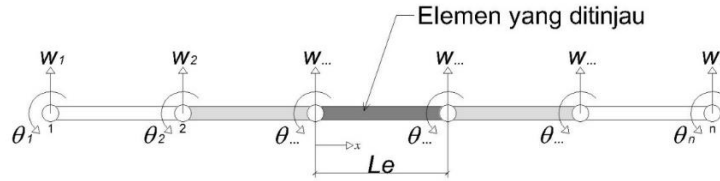
4. PERUMUSAN BALOK TIMOSHENKO BERBASIS KRIGING

Sebuah elemen balok Timoshenko dalam sebuah DOI ditunjukkan dalam **Gambar 1**. Perpindahan setiap titik dalam DOI dinyatakan dalam persamaan:

$$w = \mathbf{N}_w(x) \mathbf{d} \quad (10a)$$

$$\theta = \mathbf{N}_\theta(x) \mathbf{d} \quad (10b)$$

Dimana $\mathbf{N}_w = [N_1(x) \ 0 \ N_2(x) \ 0 \ \dots \ N_n(x) \ 0]$, $\mathbf{N}_\theta = [0 \ N_1(x) \ 0 \ N_2(x) \ \dots \ 0 \ N_n(x)]$ dan $\mathbf{d} = \{w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2 \ \dots \ w_n \ \theta_n\}^T$. *Shape function* (N) yang digunakan adalah *shape function* dari Kriging seperti dalam persamaan (7).



Gambar 1. Elemen Balok Timoshenko dalam Sebuah DOI

Untuk menyelesaikan persamaan (3) maka dibuat asumsi sebagai berikut:

$$\theta_{,x} = \frac{d}{dx} \mathbf{N}_\theta \mathbf{d} = \mathbf{B}_\theta \mathbf{d} \quad (11a)$$

$$\delta \theta_{,x} = \frac{d}{dx} \mathbf{N}_\theta \delta \mathbf{d} = \mathbf{B}_\theta \delta \mathbf{d} \quad (11b)$$

$$\gamma = w_{,x} - \theta = \frac{d}{dx} \mathbf{N}_w \mathbf{d} - \mathbf{N}_\theta \mathbf{d} = (\mathbf{B}_w - \mathbf{N}_\theta) \mathbf{d} = \mathbf{B}_\gamma \mathbf{d} \quad (11c)$$

$$\delta \gamma = \delta w_{,x} - \delta \theta = \frac{d}{dx} \mathbf{N}_w \delta \mathbf{d} - \mathbf{N}_\theta \delta \mathbf{d} = (\mathbf{B}_w - \mathbf{N}_\theta) \delta \mathbf{d} = \mathbf{B}_\gamma \delta \mathbf{d} \quad (11d)$$

Substitusi persamaan (11) ke persamaan (3) maka akan didapat persamaan:

$$\left\{ \int_0^{L_e} \mathbf{B}_\theta^T EI \mathbf{B}_\theta dx + \int_0^{L_e} \mathbf{B}_\gamma^T GA_s \mathbf{B}_\gamma dx \right\} \mathbf{d} = \int_0^{L_e} \mathbf{N}_w^T q dx \quad (12)$$

Dari persamaan (12) dapat dilihat bahwa persamaan tersebut mengacu pada persamaan standar elemen hingga ($\mathbf{k} \mathbf{d} = \mathbf{f}$) sehingga diperoleh matriks kekakuan elemen (\mathbf{k}) dan vektor gaya (\mathbf{f}).

$$\mathbf{k} = \int_0^{L_e} \mathbf{B}_\theta^T EI \mathbf{B}_\theta dx + \int_0^{L_e} \mathbf{B}_\gamma^T GA_s \mathbf{B}_\gamma dx \quad (13a)$$

$$\mathbf{f} = \int_0^{L_e} \mathbf{N}_w^T q dx \quad (13b)$$

5. TEKNIK DISCRETE SHEAR GAP

Teknik *discrete shear gap* (DSG) bertujuan untuk mensubstitusi regangan geser balok dengan regangan geser yang didapat dari mendiferensialkan fungsi DSG (Bischoff et al., 2003; Bletzinger et al., 2000). Persamaan deformasi geser dapat diperoleh dari mengintegalkan persamaan (2b):

$$\Delta w_\gamma(x) = \int_{x_0}^x \gamma dx = w|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x \theta dx \quad (14)$$

Dimana $\Delta w_\gamma(x)$ adalah selisih antara total perpindahan (Δw) dan perpindahan yang diakibatkan oleh lentur (Δw_b) atau disebut *shear gap*. Kemudian *Discrete Shear Gap* didapat dari *shear gap* yang dihitung pada titik nodal ke- i ($\Delta w_{\gamma i}$).

$$\Delta w_{\gamma i} = \int_{x_0}^{x_i} \gamma_h dx = w|_{x_0}^{x_i} - \int_{x_0}^{x_i} \theta dx \quad (15)$$

Nilai *shear gap* diantara titik-titik nodal dapat diperoleh melalui interpolasi nilai *shear gap* pada titik nodal, dengan demikian persamaannya dapat ditulis menjadi:

$$\Delta \bar{w}_\gamma(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) \Delta w_{\gamma i} \quad (16)$$

Kemudian nilai regangan geser diperoleh dengan mendiferensialkan persamaan (16).

$$\bar{\gamma}(x) = \bar{\gamma}_{DSG} = \sum_{i=1}^n N_{i,x}(x) \Delta w_{\gamma i} \quad (17)$$

Pada penelitian ini, nilai DSG hanya dihitung pada titik nodal elemen yang ditinjau, sehingga persamaan (17) menjadi:

$$\bar{V}_{DSG} = \sum_{i=1}^2 N_{i,x} \Delta w_{\gamma i} = \bar{\mathbf{B}}_{\gamma 1} \mathbf{w}_{\gamma} \quad (18a)$$

Dimana:

$$\bar{\mathbf{B}}_{\gamma 1} = [N_{i,x} \quad N_{(i+1),x}] \quad (18b)$$

$$\mathbf{w}_{\gamma} = [\Delta w_{\gamma i} \quad \Delta w_{\gamma(i+1)}]^T \quad (18c)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (10b) ke persamaan (15) maka akan didapat persamaan:

$$\Delta w_{\gamma i} = w_i - w_1 - \left(\int_{x_0}^{x_i} \mathbf{N}_{\theta}(x) dx \right) \mathbf{d} \quad (19)$$

Sehingga persamaan (18c) dapat menjadi:

$$\mathbf{w}_{\gamma} = \bar{\mathbf{B}}_{\gamma 2} \mathbf{d} \quad (20a)$$

Dimana:

$$\bar{\mathbf{B}}_{\gamma 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & -\int_{x_1}^{x_2} N_1 dx & 1 & -\int_{x_1}^{x_2} N_2 dx & 0 & -\int_{x_1}^{x_2} N_3 dx & \dots & 0 & -\int_{x_1}^{x_2} N_n dx \\ -1 & -\int_{x_1}^{x_3} N_1 dx & 0 & -\int_{x_1}^{x_3} N_2 dx & 1 & -\int_{x_1}^{x_3} N_3 dx & \dots & 0 & -\int_{x_1}^{x_3} N_n dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -\int_{x_1}^{x_n} N_1 dx & 0 & -\int_{x_1}^{x_n} N_2 dx & 0 & -\int_{x_1}^{x_n} N_3 dx & \dots & 1 & -\int_{x_1}^{x_n} N_n dx \end{bmatrix} \quad (20b)$$

$$\mathbf{d} = \{w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2\}^T \quad (20c)$$

Substitusi persamaan (20a) ke persamaan (18a) maka akan didapat persamaan:

$$\bar{V}_{DSG} = \bar{\mathbf{B}}_{\gamma 1} \bar{\mathbf{B}}_{\gamma 2} \mathbf{d} = \bar{\mathbf{B}}_{\gamma} \mathbf{d} \quad (21)$$

Dalam penelitian ini, matriks $\bar{\mathbf{B}}_{\gamma 1}$ menggunakan *shape function linear* dan matriks $\bar{\mathbf{B}}_{\gamma 2}$ hanya diambil 2 baris yang berhubungan dengan titik elemen yang ditinjau yaitu baris ke- i dan baris ke- $(i+1)$.

Kemudian dengan mengganti matriks \mathbf{B}_{γ} pada persamaan (13a) dengan matriks $\bar{\mathbf{B}}_{\gamma}$ pada persamaan (21), maka persamaan umum matriks kekakuan balok Timoshenko untuk MEH-K dengan DSG menjadi:

$$\mathbf{k} = \int_0^{L_e} \mathbf{B}_{\theta}^T EI \mathbf{B}_{\theta} dx + \int_0^{L_e} \bar{\mathbf{B}}_{\gamma}^T GA_s \bar{\mathbf{B}}_{\gamma} dx \quad (22)$$

6. HASIL PERHITUNGAN NUMERIK

Dalam penelitian ini dilakukan analisa statik saja. Hasil analisa perhitungan tersebut akan dijelaskan secara singkat pada bagian ini. Untuk memperjelas, dalam penelitian ini terdapat 2 bentuk singkatan P*-*-G dan P*-*-QS. Asterisk pertama berhubungan dengan *polynomial basis* dan asterisk kedua berhubungan dengan jumlah lapisan elemen DOI.

1. Pengujian *Shear Locking*

Pengujian dilakukan pada balok yang diberi beban terbagi rata $q = 1$ kN/m dengan perletakan jepit-jepit yang dibagi menjadi 8 elemen. Balok yang digunakan memiliki nilai $E = 2000$ kN/m², $L = 10$ m, $b = 2$ m, $\nu = 0.3$, $L/h = 10$; 100; 1000; 10000, dan $h = 1$; 0.1; 0.01; 0.001. Hasil deformasi pada tengah bentang balok tersebut dibandingkan dengan solusi eksak dari balok Timoshenko yang dirumuskan dengan:

$$w_t = \frac{q L^4}{384 EI} + \frac{q L^2}{8 G A_s} \quad (23)$$

Dapat dilihat pada **Tabel 3**. Yang merupakan hasil perhitungan deformasi pada tengah bentang balok yang telah dinormalisasi, yang dimana balok dibagi menjadi 8 elemen dengan jarak yang sama antar nodal, yaitu sebagai berikut:

Tabel 3. Normalisasi Hasil Deformasi pada Balok Timoshenko dengan Fungsi Korelasi Gauss Menggunakan Teknik DSG-1

| L/h | Hasil Eksak | Normalisasi terhadap w (Timoshenko) | | | | |
|-------|------------------|---------------------------------------|--------|--------|--------|--------|
| | w (Timoshenko) | P1-1-G | P1-2-G | P2-2-G | P2-3-G | P3-3-G |
| 1 | 0.0010 | 0.9668 | 0.9668 | 0.9668 | 0.9668 | 0.9668 |
| 5 | 0.0145 | 0.9555 | 1.0037 | 1.0037 | 1.0037 | 1.0037 |
| 10 | 0.0877 | 0.9443 | 1.0036 | 1.0036 | 1.0013 | 1.0013 |
| 100 | 78.2206 | 0.9376 | 1.0031 | 1.0025 | 1.0004 | 1.0003 |
| 1000 | 78125.9563 | 0.9375 | 1.0031 | 1.0025 | 1.0004 | 1.0002 |
| 10000 | 78125010 | 0.9375 | 1.0031 | 1.0025 | 1.0004 | 1.0002 |

Dari **Tabel 3.** terlihat hasil deformasi balok Timoshenko dengan fungsi korelasi Gauss menggunakan teknik DSG-1 menunjukkan bahwa fenomena *shear locking* telah berhasil dieliminasi dengan baik dan menunjukkan hasil yang lebih mendekati hasil eksaknya.

2. Pengujian Konvergensi dan Akurasi

Dalam bagian ini, yang ditunjukkan oleh **Tabel 4.**, dilakukan analisa konvergensi terhadap balok yang memiliki perletakan jepit bebas dan diberi beban segitiga dengan $q = 1$ kN/m. Balok dianalisis menggunakan jumlah *mesh* yang berbeda-beda yaitu 4, 8, 16, dan 32 elemen. Kemudian terdapat berbagai kondisi ketebalan balok yang digolongkan menjadi sangat tebal ($L/h = 1$), sedang / normal ($L/h = 8$), dan sangat tipis ($L/h = 10000$). Acuan yang diambil yaitu $L = 4$ m, $b = 2$ m, $E = 1000$ kN/m², dan $\nu = 0.3$. Hasil yang ditunjukkan oleh **Tabel 4.** adalah hasil normalisasi terhadap solusi eksak. Dari tabel tersebut menunjukkan hasil yang konvergen dengan tingkat akurasi tinggi. Sedangkan, distribusi gaya geser sepanjang balok dengan $L/h = 10000$ yang menggunakan 4 elemen dan 8 elemen ditunjukkan pada **Gambar 2.** Hasil distribusi gaya geser terlihat berbentuk *piecewise constant*.

Tabel 4a. Hasil Normalisasi Deformasi Balok untuk 4, 8, 16, dan 32 Elemen Menggunakan Teknik DSG-1

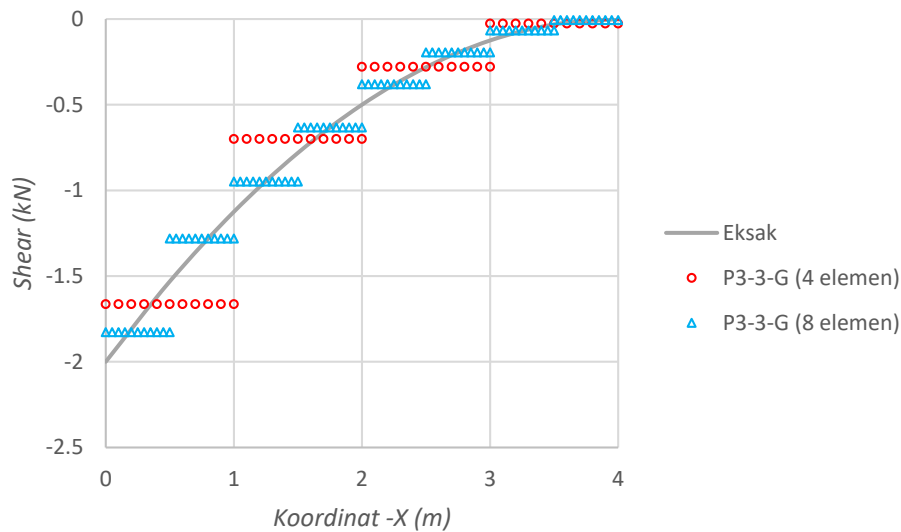
| | $L/h=1$ | | | | $L/h=8$ | | | | $L/h=10000$ | | | |
|--------|---------|--------|--------|--------|---------|--------|--------|--------|-------------|--------|--------|--------|
| | 4 | 8 | 16 | 32 | 4 | 8 | 16 | 32 | 4 | 8 | 16 | 32 |
| P1-1-G | 0.9911 | 0.9978 | 0.9994 | 0.9999 | 0.9846 | 0.9961 | 0.9990 | 0.9998 | 0.9844 | 0.9961 | 0.9990 | 0.9998 |
| P1-2-G | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| P2-2-G | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| P2-3-G | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| P3-3-G | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

Tabel 4b. Hasil Normalisasi Momen Lentur Balok untuk 4, 8, 16, dan 32 Elemen Menggunakan Teknik DSG-1

| | $L/h=1$ | | | | $L/h=8$ | | | | $L/h=10000$ | | | |
|--------|---------|--------|--------|--------|---------|--------|--------|--------|-------------|--------|--------|--------|
| | 4 | 8 | 16 | 32 | 4 | 8 | 16 | 32 | 4 | 8 | 16 | 32 |
| P1-1-G | 0.8750 | 0.9375 | 0.9687 | 0.9844 | 0.8750 | 0.9375 | 0.9687 | 0.9844 | 0.8750 | 0.9375 | 0.9687 | 0.9844 |
| P1-2-G | 0.9881 | 0.9940 | 0.9970 | 0.9985 | 0.9881 | 0.9940 | 0.9970 | 0.9985 | 0.9881 | 0.9940 | 0.9970 | 0.9985 |
| P2-2-G | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| P2-3-G | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| P3-3-G | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

Tabel 4c. Hasil Normalisasi Gaya Geser Balok untuk 4, 8, 16, dan 32 Elemen Menggunakan Teknik DSG-1

| | $L/h=1$ | | | | $L/h=8$ | | | | $L/h=10000$ | | | |
|--------|---------|--------|--------|--------|---------|--------|--------|--------|-------------|--------|--------|--------|
| | 4 | 8 | 16 | 32 | 4 | 8 | 16 | 32 | 4 | 8 | 16 | 32 |
| P1-1-G | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| P1-2-G | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| P2-2-G | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| P2-3-G | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| P3-3-G | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |



Gambar 2. Distribusi Gaya Geser terhadap Beban Segitiga

3. Pengujian Lentur Murni (*Pure Bending Test*)

Pada pengujian ini digunakan elemen balok kantilever. Balok kantilever ini akan diberi beban momen terpusat pada ujungnya. Balok ini akan dibagi menjadi 4 elemen untuk peninjauan pertama jarak antar titik nodal adalah sama panjang, sedangkan untuk peninjauan kedua jarak antar titik nodal tidak sama panjang. Balok dianalisis dengan berbagai kondisi ketebalan balok yang digolongkan menjadi sangat tebal ($L/h = 1$), sedang / normal ($L/h = 8$), dan sangat tipis ($L/h = 10000$). Acuan yang diambil yaitu $L = 10$ m, $b = 2$ m, $E = 1000$ kN/m², $\nu = 0.3$, dan $M = 1$ kNm. Besar deformasi dan rotasi yang terjadi dapat dirumuskan:

$$W_{\text{eksak}} = \frac{ML^2}{2EI} \quad (24)$$

$$\theta = \frac{ML}{EI} \quad (25)$$

Sedangkan, gaya geser tidak dinormalisasikan karena mempunyai hasil eksak yang bernilai nol. Hasil normalisasi yang ditunjukkan oleh **Tabel 5**, menunjukkan hasil yang akurat.

Tabel 5a. Normalisasi Deformasi

| L/h | Jarak antar Titik Nodal Sama Panjang | | | | | Jarak antar Titik Nodal Tidak Sama Panjang | | | | |
|--------------|--------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--|--------|--------|--------|--------|
| | P1-1-G | P1-2-G | P2-2-G | P2-3-G | P3-3-G | P1-1-G | P1-2-G | P2-2-G | P2-3-G | P3-3-G |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10000 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabel 5b. Normalisasi Rotasi

| <i>L/h</i> | Jarak antar Titik Nodal Sama Panjang | | | | | Jarak antar Titik Nodal Tidak Sama Panjang | | | | |
|--------------|--------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--|--------|--------|--------|--------|
| | P1-1-G | P1-2-G | P2-2-G | P2-3-G | P3-3-G | P1-1-G | P1-2-G | P2-2-G | P2-3-G | P3-3-G |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10000 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabel 5c. Hasil Gaya Geser

| <i>L/h</i> | Jarak antar Titik Nodal Sama Panjang | | | | | Jarak antar Titik Nodal Tidak Sama Panjang | | | | |
|--------------|--------------------------------------|-----------|----------|-----------|-----------|--|-----------|----------|-----------|-----------|
| | P1-1-G | P1-2-G | P2-2-G | P2-3-G | P3-3-G | P1-1-G | P1-2-G | P2-2-G | P2-3-G | P3-3-G |
| 1 | 1.11E-16 | -2.84E-16 | 1.08E-16 | 1.13E-15 | -1.92E-15 | 4.16E-17 | 2.75E-16 | 1.77E-16 | -9.34E-15 | 6.33E-15 |
| 8 | -6.22E-15 | -1.04E-14 | 8.88E-15 | 1.78E-15 | 3.55E-15 | -2.00E-15 | 4.04E-15 | 1.12E-14 | -1.83E-14 | -2.48E-14 |
| 10000 | 1.12E-08 | 7.92E-09 | 6.75E-09 | -1.68E-08 | 2.33E-10 | 1.63E-09 | -3.58E-08 | 4.05E-09 | -7.92E-08 | -1.93E-08 |

7. KESIMPULAN

Perhitungan numerik dengan teknik DSG yang sudah di modifikasi pada balok Timoshenko menghasilkan hasil yang akurat, konvergen, bebas dari fenomena *shear locking* dan hasil gaya gesernya berbentuk *piecewise constant*.

8. DAFTAR REFERENSI

- Babuska, I., & Guo, B. Q. (1996). Approximation Properties of the h-p Version of the Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 133, 319–346.
- Bischoff, M., Koschnick, F., & Bletzinger, K. (2003). Stabilized DSG Elements - A New Paradigm in Finite Element Technology. In *Proc. 4th European LS-DYNA Users Conference*.
- Bletzinger, K., Bischoff, M., & Ramm, E. (2000). A Unified Approach for Shear-Locking-Free Triangular and Rectangular Shell Finite Elements. *Computers and Structures*, 75, 321–334.
- Georgoulis, E. H. (2011). Discontinuous Galerkin Methods for Linear Problems: An Introduction. *Approximation Algorithms for Complex Systems, Springer Proceedings in Mathematics* 3, 91–126.
- Hale, J. S., & Baiz, P. M. (2012). A Locking-Free Meshfree Method for the Simulation of Shear-Deformable Plates Based on a Mixed Variational Formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 241–244, 311–322.
- Moes, N., Dolbow, J., & Belytschko, T. (1999). A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.*, 46, 131–150.
- Plengkhom, K., & Kanok-Nukulchai, W. (2005). An Enhancement of Finite Element Method with Moving Kriging Shape Function. *International Journal of Computational Methods*, 2(4), 451–475.
- Sulistio, A. (2014). *Pengembangan Elemen Balok Timoshenko Berbasis Kriging Bebas Locking untuk Analisis Stabilitas dan Getaran Bebas*. (TA No. 11011926/SIP/2014). Unpublished undergraduate thesis, Universitas Kristen Petra, Surabaya.
- Wong, F. T., Sulistio, A., & Syamsoeyadi, H. (2016). Kriging-based Timoshenko Beam Elements with the Discrete Shear Gap Technique. *Submitted to International Journal of Computational Methods*, (Under Review).