

STUDI TEKNIK DISCRETE SHEAR GAP PADA ELEMEN BALOK TIMOSHENKO

Steven Sugianto¹ dan Wong Foek Tjong²

ABSTRAK : Salah satu fenomena yang ada dalam penggunaan MEH untuk masalah struktur balok adalah fenomena *shear locking*. Salah satu metode untuk mengatasi fenomena tersebut adalah metode *Discrete Shear Gap* (DSG), yaitu metode yang digunakan dengan cara memodifikasi perumusan regangan geser pada MEH konvensional menjadi regangan geser DSG. Penggunaan regangan geser DSG menunjukkan hasil yang secara umum lebih eksak dan akurat dibandingkan penggunaan regangan geser biasa. Adanya penelitian ini adalah untuk fenomena *shear locking* pada balok Timoshenko. Dari penelitian ini, didapatkan bahwa dengan metode DSG, elemen balok Timoshenko bebas dari *shear locking*. Hasil analisa juga membuktikan bahwa metode DSG efektif digunakan untuk semua jenis elemen balok Timoshenko pada ketebalan yang sangat tipis, normal, dan sangat tebal.

KATA KUNCI: metode elemen hingga, *shear locking*, metode DSG, regangan geser, balok Timoshenko.

1. PENDAHULUAN

Metode elemen hingga (MEH) kini sudah secara luas digunakan sebagai metode numerik untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam bidang rekayasa dan ilmu pengetahuan (Bathe, 1996; Cook et al., 2002; Zienkiewicz & Taylor, 2000). Kemampuan MEH telah teruji selama beberapa dekade terakhir dalam praktek nyata bidang rekayasa. Salah satu fenomena yang ada dalam penggunaan MEH untuk masalah struktur balok adalah fenomena *shear locking*. Fenomena ini adalah suatu kondisi di mana suatu elemen sangat kaku ketika bentangnya semakin panjang atau semakin langsing. Hasil yang seharusnya didapatkan dari analisa dan perhitungan elemen-elemen tersebut adalah nilai lendutan yang semakin besar, tetapi sebaliknya terdapat hasil yang kecil sekali, tidak akurat bahkan tidak benar sama sekali (*error*). Maka dari itu terdapat beberapa metode untuk mengatasi fenomena ini, antara lain seperti metode *selective reduce integration* (SRI) oleh Hughes et al. (1977). Kemudian pada perkembangannya, terdapat metode lain yang diajukan untuk mengatasi fenomena ini yaitu metode *discrete shear gap* (DSG) yang diusulkan oleh Bletzinger et al. (1998). Metode ini digunakan dengan cara memodifikasi perumusan regangan geser pada MEH konvensional menjadi regangan geser DSG. Metode ini memiliki berbagai keuntungan, yaitu formulasinya yang sama baik untuk elemen *triangular* atau *rectangular*, lolos *patch test*, dan menunjukkan berkurangnya sensitivitas terhadap distorsi *mesh*. Waktu komputasi untuk pembentukan matriks kekakuan elemen lebih kecil daripada elemen *pure displacement*, yang membuat metode ini sangat efisien. Elemen hasilnya pun didapati bebas dari *locking*. Tetapi penelitian yang dikemukakan oleh Bletzinger et al. mempunyai kekurangan yaitu pengujian numerikal yang kurang komprehensif terhadap metode yang digunakan. Pengujian numerik yang dimaksud meliputi pengujian untuk elemen balok Timoshenko.

Dalam konteks MEH berbasis Kriging, telah dilakukan penilitan penggunaan teknik DSG untuk balok Timoshenko. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa teknik DSG efektif dalam mengeliminasi *shear locking* elemen balok Timoshenko berbasis Kriging dengan fungsi basis linear - satu lapis elemen, yang identik dengan elemen linear balok Timoshenko seperti yang dipresentasikan oleh Bletzinger et al. (1998). Selain itu didapati teknik DSG efektif untuk mengeliminasi *shear locking* elemen Kriging

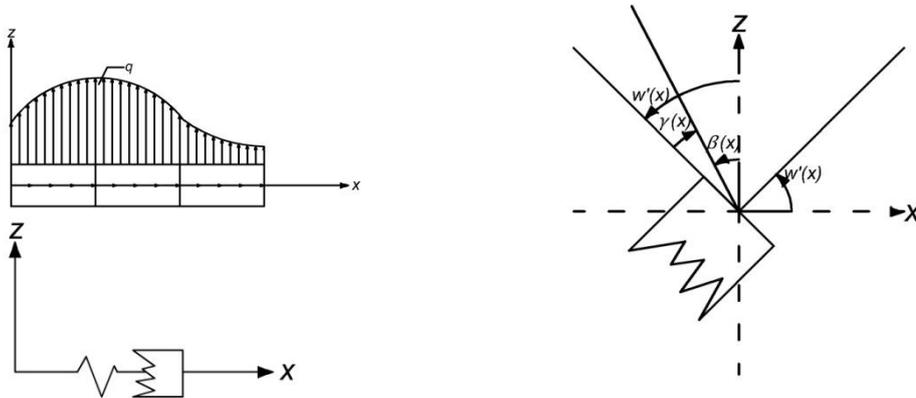
¹ Mahasiswa Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, sostevensugianto@gmail.com

² Dosen Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, wftjong@petra.ac.id

dengan fungsi basis *cubic* - tiga lapis (Sulistio, 2013). Akan tetapi penelitian teknik DSG dalam MEH standar untuk balok Timoshenko, terutama pada bagian pengujian numerik secara komprehensif masih belum dilakukan.

2. ASUMSI DASAR BALOK TIMOSHENKO

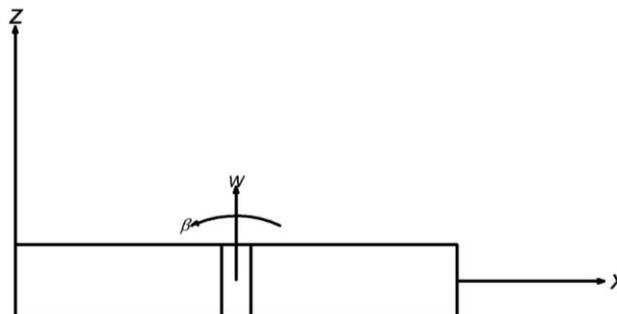
Terdapat dua macam teori balok yang umum digunakan dalam praktek maupun penelitian, yaitu teori balok Euler-Bernoulli dan teori balok Timoshenko. Dalam teori balok Euler-Bernoulli, diasumsikan bahwa ketika suatu balok mengalami lendutan (akibat gaya ataupun berat sendirinya), bidang datar pada balok tersebut yang berarah normal terhadap garis netral tetaplah merupakan suatu bidang datar dan berarah normal terhadap garis netralnya. Akibat dari asumsi tersebut regangan geser dalam balok diabaikan yang berarti dianggap bernilai nol. Akan tetapi, dalam teori balok Timoshenko, nilai regangan geser diperhitungkan di mana asumsi dasar untuk teori balok Timoshenko adalah bahwa bidang datar tetap datar setelah mengalami lendutan tetapi tidak perlu berarah normal terhadap garis netralnya (Reddy, 2006). Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat pada **Gambar 1**. Pada teori balok Timoshenko, deformasi geser $\gamma(x)$ dipengaruhi oleh adanya perpindahan $w(x)$ dan rotasi $\beta(x)$ pada penampang balok. Kemudian $\gamma(x)$ dicari dari selisih antara gradien perpindahan $w'(x)$ dan rotasi $\beta(x)$ pada titik manapun x di sepanjang balok.



Gambar 1. Teori Balok Timoshenko dimana sebelum Deformasi Arah Bidang Penampangnya Tidak Harus Tetap Berarah Normal terhadap Garis Netral Penampang

3. PERSAMAAN GERAK BALOK TIMOSHENKO

Pada **Gambar 2**, terlihat sebuah balok Timoshenko. Dalam teori balok Timoshenko, terdapat dua derajat kebebasan, yaitu lendutan (w) dan rotasi (β).



Gambar 2. Balok Timoshenko Memiliki Dua Derajat Kebebasan yaitu w dan β

Perpindahan (*displacement*) untuk arah x dan z (arah y bernilai tidak ditinjau) dapat ditulis sebagai berikut:

$$u = -z\beta(x) \tag{1}$$

$$w = w(x) \tag{2}$$

Dimana w adalah perpindahan transversal dari sumbu netral dan β adalah rotasi dari penampang balok. Komponen regangan yang tidak nol adalah sebagai berikut:

$$\varepsilon_{xx} = -z\beta_{,x} \tag{3}$$

$$\gamma_{xz} = w_{,x} - \beta \tag{4}$$

Dimana ε_{xx} adalah regangan akibat momen lentur dan γ_{xz} adalah regangan akibat gaya geser. Tanda koma berarti turunan parsial pertama terhadap variabel disebelahnya. Dengan mengikuti prinsip kerja virtual, maka didapatkan persamaan bentuk lemah (*weak form*) sebagai berikut:

$$\int_0^L \delta\beta_{,x} EI \beta_{,x} dx + \int_0^L (\delta w_{,x} - \delta\beta) kGA(w_{,x} - \beta) dx = \int_0^L \delta w q dx + \int_0^L \delta\beta m dx \tag{5}$$

Kemudian gaya geser (Q) dan momen lentur (M) dirumuskan sebagai berikut:

$$Q = kGA(w_{,x} - \beta) \tag{6}$$

$$M = EI(\beta_{,x}) \tag{7}$$

4. PERUMUSAN ELEMEN BALOK TIMOSHENKO

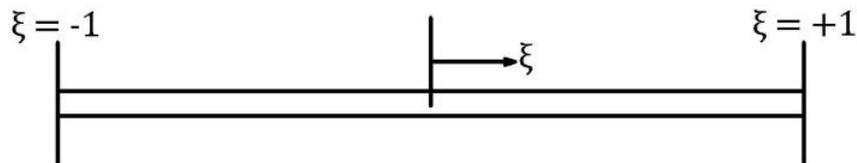
Pada suatu balok Timoshenko, ditinjau suatu elemen. Fungsi perpindahan dalam elemen tersebut dapat ditulis sebagai berikut:

$$w = [N_w] \{d\} \tag{8}$$

$$\beta = [N_\beta] \{d\} \tag{9}$$

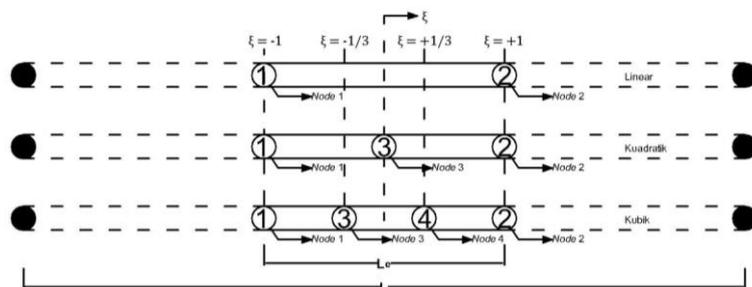
dimana $N_w = [N_1 \ 0 \ N_2 \ 0 \ \dots \ N_n \ 0]$ dan $N_\beta = [0 \ N_1 \ 0 \ N_2 \ \dots \ 0 \ N_n]$ yang masing-masing adalah *shape function* yang menghubungkan perpindahan titik nodal elemen (w dan β) dengan perpindahan titik nodal struktur $d = \{w_1 \ \beta_1 \ w_2 \ \beta_2 \ \dots \ w_n \ \beta_n\}^T$, n adalah jumlah *node* dalam elemen balok. Pada **Gambar 3.**, dengan menggunakan konsep *isoparametric mapping*, terjadi interpolasi kordinat yaitu dengan mengubah variabel x menjadi variabel dalam *natural coordinate system* ξ , dapat juga ditulis sebagai berikut:

$$x = [N_x] \{c\} \tag{10}$$



Gambar 3. Hubungan Variabel x dengan Variabel Sistem Koordinat Alami ξ

Pada **Gambar 4.** dan **Tabel 1.**, *shape function* yang digunakan pada elemen linear, kuadratik, dan kubik dalam *natural coordinate system* menjadi sebagai berikut:



Gambar 4. Elemen dengan Interpolasi Linear, Kuadratik, dan Kubik

Tabel 1. Shape Function untuk Elemen Linear (2 node), Kuadratik (3 node), dan Kubik (4 node)

Node yang digunakan	Node 1 & Node 2	+ Node 3	+ Node 3 & Node 4
N_1	$\frac{1}{2}(1 - \xi)$	$-\frac{1}{2}(1 - \xi^2)$	$+\frac{1}{16}(-9\xi^3 + \xi^2 + 9\xi - 1)$
N_2	$\frac{1}{2}(1 + \xi)$	$-\frac{1}{2}(1 - \xi^2)$	$+\frac{1}{16}(9\xi^3 + \xi^2 - 9\xi - 1)$
N_3	$(1 - \xi^2)$		$+\frac{1}{16}(27\xi^3 + 7\xi^2 - 27\xi - 7)$
N_4	$\frac{1}{16}(-27\xi^3 - 9\xi^2 + 27\xi + 9)$		

Kemudian terdapat matriks perpindahan-regangan terhadap *displacement* (B_w) dan rotasi (B_β) yaitu sebagai berikut:

$$B_w = [J]^{-1} [N_{1,\xi} \ 0 \ N_{2,\xi} \ 0 \ \dots \ N_{n,\xi} \ 0] \quad (11)$$

$$B_\beta = [J]^{-1} [0 \ N_{1,\xi} \ 0 \ N_{2,\xi} \ \dots \ 0 \ N_{n,\xi}] \quad (12)$$

Persamaan kekakuan elemen $[k]$ dan gaya yang bekerja $\{f\}$ pada balok dapat dituliskan sebagai berikut:
 $[k]\{d\} = \{f\}$

Masing-masing matriks $[k]$ dan $\{f\}$ tersebut dinyatakan dalam persamaan:

$$[k] = EI \int_{-1}^1 [B_\beta]^T [B_\beta] [J] d\xi + GA_s \int_{-1}^1 ([B_w] - [N_\beta])^T ([B_w] - [N_\beta]) [J] d\xi \quad (13)$$

$$\{f\} = \int_{-1}^1 [N_w]^T q [J] d\xi + \int_{-1}^1 [N_\beta]^T m [J] d\xi \quad (14)$$

5. METODE ELIMINASI SHEAR LOCKING

Dalam penelitian ini eliminasi *shear locking* dilakukan dengan 2 cara yaitu metode *Selective Reduced Integration* dan *Discrete Shear Gap*. Masing-masing metode tersebut akan dijelaskan pada bagian ini.

1. Metode *Selective Reduced Integration* (SRI)

Metode ini pertama kali dipaparkan oleh Hughes et al. (1977), yang merupakan metode yang sederhana dan diakui dapat menghasilkan perhitungan yang akurat. Metode ini memakai cara perhitungan matriks kekakuan yang sama seperti pada persamaan (13). Penggunaan integrasi numeriknya menggunakan cara *Gauss Quadrature* dengan tidak dilakukan secara penuh untuk matriks kekakuan geser (*shear stiffness matrix*), sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$[k_s] = \frac{\kappa GA}{L} \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{2} & -1 & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & -\frac{L}{2} & -\frac{L^2}{4} \\ -1 & -\frac{L}{2} & 1 & -\frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & -\frac{L^2}{4} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \end{bmatrix} \quad (15)$$

2. Metode *Discrete Shear Gap* (DSG)

Dalam metode ini, perumusan regangan geser dirumuskan pada sepanjang elemen, dan hasil dari regangan geser diskrit pada setiap titik nodal diinterpolasi sepanjang *domain* elemen (Bletzinger et al, 1998). Metode ini mirip dengan metode ANS (*Assumed Natural Strain*) atau MITC (*Mixed Interpolation of Tensorial Component*) yang dikembangkan oleh Bathe dan rekan – rekannya dalam *bilinear element*.

Pada elemen balok Timoshenko, deformasi geser adalah integrasi dari regangan geser, dan persamaannya dapat diperoleh dari integrasi persamaan (4), yang dapat ditulis menjadi:

$$\Delta w_{\gamma}(x) = \int_{x_0}^x \gamma dx = \int_{x_0}^x (w_{,x} - \beta) dx \quad (16)$$

Dimana $\Delta w_{\gamma}(x)$ adalah perbedaan perpindahan geser yang dapat pula disebut sebagai *shear gap* yang merupakan perbedaan dari perubahan perpindahan total Δw dan perubahan perpindahan lentur murni Δw_b . *Shear gap* pada titik nodal ke $-i$ ($\Delta w_{\gamma i}$) dapat didapatkan dengan mengintegrasikan regangan geser diskrit dari titik nodal pertama hingga titik nodal ke $-i$, sehingga persamaan (16) dapat diubah menjadi:

$$\Delta w_{\gamma i}(x_i) = \int_{x_0}^{x_i} \gamma_h dx = w_h|_{x_0}^{x_i} - \int_{x_0}^{x_i} \beta_h dx \quad (17)$$

Shear Gap dapat diinterpolasi pada balok dengan *shear gap* pada setiap titik nodal balok, sehingga dapat pula ditulis sebagai berikut:

$$\Delta w_{\gamma} = \sum_{i=1}^n N_i \Delta w_{\gamma i} \quad (18)$$

Regangan geser dapat diperoleh dari turunan persamaan (18), dapat ditulis sebagai berikut:

$$\gamma_h = \gamma_{DSG} = \sum_{i=1}^n \frac{dN_i}{dx} \Delta w_{\gamma i} \quad (19)$$

6. HASIL PERHITUNGAN NUMERIK

Dalam penelitian ini dilakukan analisa statik saja. Hasil analisa perhitungan tersebut akan dijelaskan secara singkat pada bagian ini.

1. Pengujian Metode Eliminasi *Shear Locking*

Pengujian dilakukan pada balok yang diberi beban terbagi rata $q = 1$ kN/m dengan perletakan jepit-jepit yang dibagi menjadi 8 elemen. Balok yang digunakan memiliki nilai $E = 1000$ kN/m², $L = 10$ m, $b = 2$ m, $\nu = 0.3$, dan nilai L/h yang bervariasi dari 5 hingga 10^4 . Hasil yang akan dianalisa adalah perpindahan pada tengah bentang yang akan dibandingkan dengan solusi eksak balok Euler-Bernoulli, yaitu:

$$w_{eksak} = \frac{q L^4}{384 E I} \quad (25)$$

Dapat dilihat pada **Tabel 2**. Yang merupakan hasil perhitungan defleksi pada tengah bentang balok yang telah dinormalisasi, yang dimana balok dibagi menjadi 8 elemen dengan jarak yang sama antar nodal, yaitu sebagai berikut:

Tabel 2. Normalisasi Hasil Defleksi pada Tengah Bentang Balok

Ketebalan		$L/h = 5$	$L/h = 10$	$L/h = 100$	$L/h = 1.000$	$L/h = 10.000$
Linear	Full	1,3209711	0,7430057	0,0192313	0,0001958	0,0000020
	SRI	1,4271000	1,0599000	0,9387240	0,9375122	0,9375001
	DSG	1,4271000	1,0599000	0,9387240	0,9375122	0,9375001
Kuadratik	Full	1,4896000	1,1166087	0,9442982	0,9375734	0,9375007
	SRI	1,4899000	1,1224000	1,0012240	1,0000112	1,0000001
	DSG	1,4899000	1,1224000	1,0012240	1,0000112	1,0000001
Kubik	Full	1,4992000	1,1228000	1,0013240	1,0000132	1,0000001
	SRI	1,4996000	1,1236000	1,0013840	1,0000137	1,0000002
	DSG	1,4996000	1,1236000	1,0013840	1,0000137	1,0000002

Dari **Tabel 2**, terlihat bahwa penggunaan integrasi penuh (*full integration*) untuk semua jenis elemen menghasilkan nilai yang keliru. Pada balok yang sangat tipis ($L/h = 10$ sampai 10^4) solusi yang diberikan oleh penggunaan *full integration* dengan jenis elemen linear dan kuadratik, menunjukkan bahwa masih terjadi *shear locking* pada balok tersebut. Hal ini disebabkan karena perumusan *shear strain*-nya yang kurang tepat. Penggunaan metode SRI dan DSG menunjukkan hasil yang sangat baik dalam mengeliminasi *shear locking* untuk semua jenis elemen.

2. Pengujian Konvergensi Perpindahan, Gaya Momen, dan Gaya Geser

Dalam bagian ini, yang ditunjukkan oleh **Tabel 3.**, dilakukan analisa konvergensi terhadap balok yang memiliki perletakan jepit bebas dan diberi beban segitiga dengan $q = 1$ kN/m. Balok yang digunakan memiliki nilai $E = 1000$ kN/m², $L = 4$ m, $b = 2$ m, $h = 0.5$ m, $\nu = 0.3$, $L/h = 8$ (ketebalan normal), $L/h = 1$ (ketebalan sangat tebal), dan $L/h = 10000$ (ketebalan sangat tipis). Hasilnya yang ditunjukkan oleh **Tabel 3.** adalah hasil normalisasi terhadap solusi eksak. Dari tabel tersebut ditunjukkan bahwa hasil analisa dengan metode SRI dan DSG pada semua jenis dan jumlah elemen menunjukkan hasil yang sangat dekat dengan solusi eksaknya.

Tabel 3a. Hasil Konvergensi Perpindahan, Momen Lentur, dan Gaya Geser pada Ketebalan Normal

Jenis Elemen	Jumlah elemen	Defleksi			Momen Lentur			Gaya Geser		
		Full Int.	SRI	DSG	Full Int.	SRI	DSG	Full Int.	SRI	DSG
Linear	4	0,4552	1,0248	1,0248	0,3081	0,7109	0,7109	3,9932	8,2054	0,7708
	8	0,7632	1,0063	1,0063	0,6293	0,8349	0,8349	4,1706	5,2460	0,8802
	16	0,9274	1,0015	1,0015	0,8431	0,9119	0,9119	3,1430	3,3230	0,9388
	32	0,9807	1,0004	1,0004	0,9354	0,9545	0,9545	2,1919	2,2168	0,9690
Kuadratik	4	0,9948	1,0001	1,0001	0,9127	0,9726	0,9726	1,7883	1,9972	0,9895
	8	0,9996	1,0000	1,0000	0,9825	0,9926	0,9926	1,2674	1,2850	0,9974
	16	0,9999	1,0000	1,0000	0,9966	0,9981	0,9981	1,0748	1,0760	0,9993
	32	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9995	0,9995	1,0195	1,0196	0,9998
Kubik	4	0,9998	0,9998	0,9998	0,9959	0,9987	1,0017	1,0583	1,0641	1,0069
	8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9996	0,9998	1,0006	1,0091	1,0094	1,0017
	16	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	1,0001	1,0014	1,0014	1,0004
	32	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0002	1,0002	1,0001

Tabel 3b. Hasil Konvergensi Perpindahan, Momen Lentur, dan Gaya Geser pada Ketebalan Sangat Tebal

Jenis Elemen	Jumlah elemen	Defleksi			Momen Lentur			Gaya Geser		
		Full Int.	SRI	DSG	Full Int.	SRI	DSG	Full Int.	SRI	DSG
Linear	4	0,0000	1,0253	1,0253	0,6967	0,7109	0,7109	0,8846	0,8870	0,7708
	8	0,0000	1,0064	1,0064	0,8307	0,8349	0,8349	0,9480	0,9484	0,8802
	16	0,0000	1,0016	1,0016	0,9108	0,9119	0,9119	0,9760	0,9760	0,9388
	32	0,0000	1,0004	1,0004	0,9542	0,9545	0,9545	0,9885	0,9885	0,9690
Kuadratik	4	0,9741	1,0001	1,0001	0,9714	0,9726	0,9726	1,0052	1,0053	0,9896
	8	0,9935	1,0000	1,0000	0,9925	0,9926	0,9926	1,0018	1,0018	0,9974
	16	0,9983	1,0000	1,0000	0,9980	0,9981	0,9981	1,0005	1,0005	0,9993
	32	0,9996	1,0000	1,0000	0,9995	0,9995	0,9995	1,0001	1,0001	0,9998
Kubik	4	0,9998	0,9998	0,9999	0,9986	0,9987	1,0017	1,0078	1,0078	1,0069
	8	0,9999	0,9999	1,0000	0,9998	0,9998	1,0006	1,0018	1,0018	1,0017
	16	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	1,0001	1,0004	1,0004	1,0004
	32	1,0000	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0001	1,0001	1,0001

Tabel 3c. Hasil Konvergensi Perpindahan, Momen Lentur, dan Gaya Geser pada Ketebalan Sangat Tipis

Jenis Elemen	Jumlah elemen	Defleksi			Momen Lentur			Gaya Geser		
		Full Int.	SRI	DSG	Full Int.	SRI	DSG	Full Int.	SRI	DSG
Linear	4	0,0000	1,0253	1,0253	0,0000	0,7109	0,7109	6,4583	116166	0,7708
	8	0,0000	1,0064	1,0064	0,0000	0,8349	0,8349	14,239	682157	0,8802
	16	0,0000	1,0016	1,0016	0,0000	0,9119	0,9119	30,122	372544	0,9388
	32	0,0000	1,0004	1,0004	0,0000	0,9545	0,9545	62,059	194970	0,9690
Kuadratik	4	0,9741	1,0001	1,0001	0,6835	0,9726	0,9726	4,8437	1,6E+0	0,9895
	8	0,9935	1,0000	1,0000	0,8276	0,9926	0,9926	5,3983	4,5E+0	0,9974
	16	0,9983	1,0000	1,0000	0,9101	0,9981	0,9981	5,6931	1,2E+0	0,9993
	32	0,9996	1,0000	1,0000	0,9541	0,9995	0,9995	5,8444	3,1E+0	0,9998
Kubik	4	0,9998	0,9998	0,9998	0,9713	0,9987	1,0017	1,5173	8,9E+0	1,0069
	8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9925	0,9998	1,0006	1,2751	1,2E+0	1,0017
	16	1,0000	1,0000	0,9999	0,9980	0,9999	1,0001	1,1417	1,5E+0	1,0004
	32	1,0000	0,9999	1,0000	0,9995	1,0000	1,0000	1,0718	2,0E+0	1,0001

7. KESIMPULAN

Perhitungan numerik dengan metode DSG untuk balok Timoshenko menghasilkan hasil yang terbaik dibandingkan metode lainnya, sangat baik karena sama dengan solusi eksaknya, dan bebas dari fenomena *shear locking*.

8. DAFTAR REFERENSI

- Bathe, K.J. (1996). *Finite Element Procedures*. New Jersey, Prentice Hall.
- Cook, Robert D., Malkus, David S., Plesha, Michael E. & Witt, Robert J. (2002). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis* (4th ed.). Canada: John Wiley & Sons, Inc.
- Zienkiewicz, O.C. and R.L. Taylor (2000a). *The Finite Element Method*, Volume 1: The Basis, 5th edition. Oxford, Butterworth Heinemann.
- Zienkiewicz, O.C. and R.L. Taylor (2000b). *The Finite Element Method*, Volume 2: Solid Mechanics, 5th edition. Oxford, Butterworth Heinemann.
- Hughes, T.J.R., Taylor, R.L., & Kanok-Nukulchai, W. (1977). A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11, 1529-1543.
- Bletzinger, K.U., Bischoff, & M., Ramm, E. (1998). "A Unified Approach for Shear-Locking-Free Triangular And Rectangular Shell Finite Elements", *Computational Mechanics* (1998): 1-22.
- Sulistio, A. (2013). Pengembangan Elemen Balok Timoshenko Berbasis Kriging Bebas *Locking* untuk Analisis Stabilitas dan Getaran Bebas, (TA No. 11011926/ SIP/ 2014). Universitas Kristen Petra, Surabaya.
- Reddy, J. N. (2006). *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, Singapore.