

# IMPLEMENTASI ELEMEN TETRAHEDRON LINEAR DAN KUADRATIK UNTUK ANALISIS TEGANGAN TIGA DIMENSI DENGAN MENGGUNAKAN PROGRAM MATLAB DAN GiD

Bryan Linggo Satria<sup>1</sup>, Levin Sergio Tanaya<sup>2</sup> and Wong Foek Tjong<sup>3</sup>

**ABSTRAK :** Metode elemen hingga (MEH) saat ini telah populer digunakan untuk memecahkan masalah-masalah yang sulit diselesaikan dengan metode analitik. Salah satu permasalahan yang sulit adalah objek tiga dimensi yang dapat ataupun tidak dapat dimodelkan dalam satu ataupun dua dimensi dimana permodelan tiga dimensi yang paling representatif. Dengan demikian dalam studi ini dibuat program untuk menyelesaikan permasalahan permodelan tiga dimensi dengan menggunakan elemen tetrahedron linier dan kuadrat. Analisis statik linier *3D solid* diimplementasikan dalam program MATLAB, sedangkan *pre-process* dan *post-process* dengan program GiD. Keakuratan dan konvergensi MEH *3D solids* ini diuji dengan menyelesaikan berbagai *benchmark problems*. Hasil-hasil pengujian menunjukkan bahwa MEH *3D solids* mampu untuk mencapai hasil diharapkan dengan material isotropik maupun orthotropik. Penggunaan elemen kuadrat mampu mencapai hasil yang diharapkan lebih cepat dari elemen linier, sehingga penggunaan elemen kuadrat lebih efisien. Hasil yang didapat dengan elemen kuadrat cenderung konvergen di atas hasil referensi. Program yang dibuat diharapkan menjadi alternatif dalam analisis permodelan tiga dimensi.

**KATA KUNCI:** metode elemen hingga, *3D solid*, elemen tetrahedron linear, elemen tetrahedron kuadrat, MATLAB, GiD

## 1. PENDAHULUAN

Metode elemen hingga (MEH) saat ini telah populer digunakan diberbagai bidang teknik. Secara khusus metode ini digunakan untuk memecahkan masalah-masalah yang rumit. Permasalahan diselesaikan dengan cara membagi sebuah objek menjadi elemen-elemen kecil yang sederhana (Logan, 2007). Elemen diidealisasikan memiliki kekakuan dan diberikan beban yang ekuivalen dengan beban pada objek sebenarnya. Selanjutnya elemen-elemen tersebut akan digabungkan kembali untuk mendapatkan solusi dari permasalahan.

Permasalahan yang dibahas adalah permasalahan *3D solid*. Penelitian ini menggunakan analisa statik linear dengan elemen tetrahedral linear dan kuadrat. Elemen tetrahedral memiliki bentuk limas segitiga, dimana elemen linear memiliki empat titik dan elemen kuadrat memiliki sepuluh titik (Liu & Quek, 2003). Analisa statik linear *3D solid* dengan elemen tetrahedral linear dan kuadrat diharapkan dapat bekerja dengan efektif dan efisien untuk memperoleh hasil yang diharapkan.

Penelitian ini bertujuan untuk mempelajari dan menciptakan program analisis 3D menggunakan elemen tetrahedral linear dan kuadrat. Program yang dikembangkan berbasis MATLAB (MathWork, 2010) untuk proses perhitungan. Program GiD (CIMNE, 2002) digunakan untuk proses awal (*meshing*) dan akhir penyajian hasil. Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat menjadi program alternatif untuk analisa

---

<sup>1</sup> Mahasiswa Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra, bryanlinggo94@gmail.com.

<sup>2</sup> Mahasiswa Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra, levintanaya@gmail.com.

<sup>3</sup> Dosen Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra, wftjong@petra.ac.id.

3D menggunakan elemen tetrahedral yang dapat terus dikembangkan. Hasil penelitian juga dibuat untuk memahami tingkat akurasi dan konvergensi dari program yang telah dibuat.

## 2. TEORI ELASTISITAS 3D SOLID

Untuk menyelesaikan masalah elastisitas pada 3D solid, digunakan prinsip usaha virtual atau sering dikenal dengan prinsip perpindahan virtual, yang dirumuskan sebagai berikut (Liu & Quek, 2003) :

$$\int \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int \{\delta U\}^T \{f_b\} dV + \int \{\delta U\}^T \{f_s\} dS \quad (1)$$

dengan  $\{\delta \varepsilon\}$  adalah vektor regangan yang diakibatkan perpindahan virtual,  $\{\sigma\}$  adalah vektor tegangan yang terjadi,  $\{\delta U\}$  adalah vektor perpindahan virtual,  $\{f_b\}$  adalah vektor *body force* dalam volum  $V$ ,  $\{f_s\}$  adalah vektor beban luar yang bekerja pada permukaan. Permasalahan didiskritisasi menggunakan elemen-elemen sederhana sehingga menurut **Persamaan (1)** masing-masing elemen berlaku persamaan kesetimbangan  $[k]\{d\} = \{F_b\} + \{F_s\}$ , dengan  $[k]$  adalah matriks kekakuan, dapat dirumuskan dengan  $[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dV$ ,  $\{F_b\}$  adalah matriks vektor gaya yang bekerja pada volume, dapat dirumuskan dengan  $\{F_b\} = \int_V [N]^T \{f_b\} dV$ , dan  $\{F_s\}$  adalah matriks vektor gaya yang bekerja pada permukaan, dapat dirumuskan dengan  $\{F_s\} = \int_S [N]^T \{f_s\} dS$ .

Jenis material yang digunakan adalah material isotropik dan orthotropik. Penyelesaian matriks dilakukan dengan metode matriks partisi dan eliminasi Gauss. Algoritma perhitungan diimplementasikan pada program MATLAB. Sedangkan program GiD digunakan untuk *pre-process* (*meshing*) dan *post-process* (visualisasi).

## 3. METODE PENELITIAN

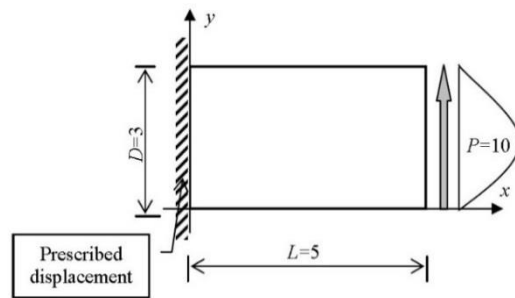
Setiap permasalahan 3D solid di-mesh dengan bantuan program GiD yang dijadikan input untuk algoritma perhitungan. Dengan input berupa koordinat titik dan *element connectivity* algoritma perhitungan diimplementasikan pada program MATLAB. Hasil analisa program dibandingkan dengan hasil referensi dan diamati tingkat akurasi dan konvergensinya. Hasil dari program berupa perpindahan ataupun tegangan divisualisasikan lagi dengan menggunakan program GiD.

## 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

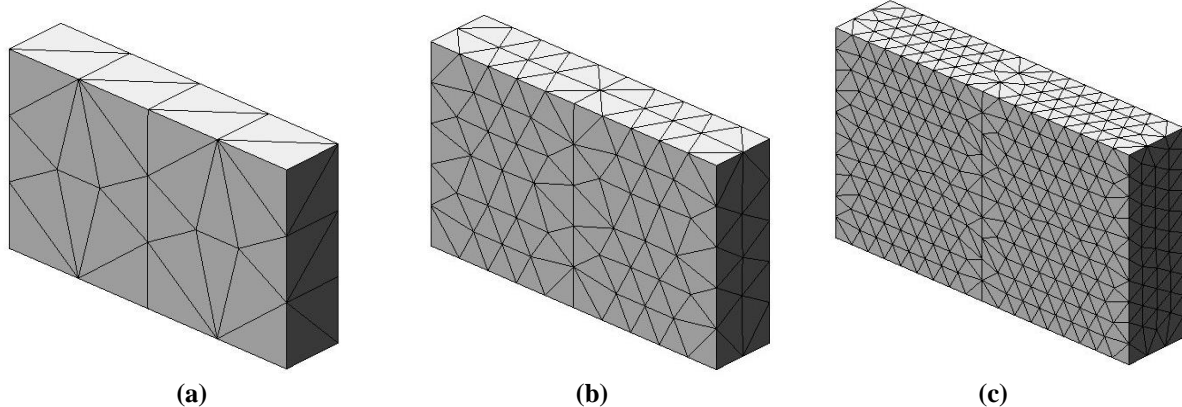
Program yang dibuat diuji dengan beberapa permasalahan, antara lain: *three dimensional cantilever beam* (Pudjisyadi, 2002), *spherical shell with varying thickness* (Wong et al, 2015), dan ortotropik Cook *membrane* yang merupakan modifikasi dari permasalahan Cook *membrane* yang umum namun properti bahannya dirubah menjadi material ortotropik.

### 4.1. Three Dimensional Cantilever Beam

*Three dimensional cantilever beam* adalah permasalahan dari Timoshenko yang berupa *cantilever beam*, namun bentuk geometri yang digunakan merujuk pada geometri dari Pudjisyadi (2002) menurut **Gambar 1**. Permasalahan *cantilever beam* ini di-mesh dengan bantuan program GiD dengan geometri tiga dimensi sehingga didapati 3 ukuran *mesh* yang digunakan dalam program yang dibuat untuk diuji, yakni ukuran *mesh* 1 dengan 124 elemen, ukuran *mesh* 0.553 dengan 698 elemen, dan ukuran *mesh* 0.294 dengan 5644 elemen. Bentuk *mesh* dari beragam ukuran mesh yang digunakan pada permasalahan *cantilever beam* dapat dilihat pada **Gambar 2**.



Gambar 1. Geometri Permasalahan *Cantilever Beam* (Pudjisuryadi, 2002)



Gambar 2. Visualisasi *Mesh Cantilever Beam* Menggunakan Program GiD: (a) *Cantilever Beam* dengan 124 Elemen, (b) *Cantilever Beam* dengan 698 Elemen, (c) *Cantilever Beam* dengan 5644 Elemen

Pada permasalahan *cantilever beam* hasil yang diuji adalah *displacement z* pada ujung *beam* ( $x = 5$ ), *strain energy*, tegangan normal dan geser pada tengah bentang ( $x = 2.5$ ). Adapun hasil eksak untuk *cantilever beam* adalah sebagai berikut:

$$w = \frac{P}{6EI} \left[ x^2(3L - x) + 3v(L - x) \left( z - \frac{D}{2} \right)^2 + \frac{4+5v}{4} D^2 x \right] \quad (2)$$

$$\sigma_x = -\frac{P}{I} (L - x) \left( y - \frac{D}{2} \right) \quad (3)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{Py}{2I} (z - D) \quad (4)$$

dengan nilai modulus Young  $E = 1000$ , poisson ratio  $\nu = 0.25$ , dimensi panjang  $L = 5$ , tebal  $H = 1$ , tinggi  $D = 3$ , momen inersia  $I = D^3/12$  dan beban  $P$  sebesar 10. Sedangkan untuk *strain energy*  $U$  memiliki nilai eksak sebesar 1.17593.

Melalui penggunaan program yang dibuat, didapati nilai *displacement z* pada ujung *beam* dibandingkan dengan nilai eksak dari **Persamaan (2)**, disajikan perbandingan dan nilai *normalized displacement z* pada **Tabel 1**. Nilai *normalized displacement z* merupakan perbandingan nilai *displacement z* dari program dengan nilai eksak *displacement z*. Perbandingan *strain energy* hasil program dengan hasil eksak serta besaran *relative error* dari *strain energy* ditunjukkan dalam **Tabel 2**.

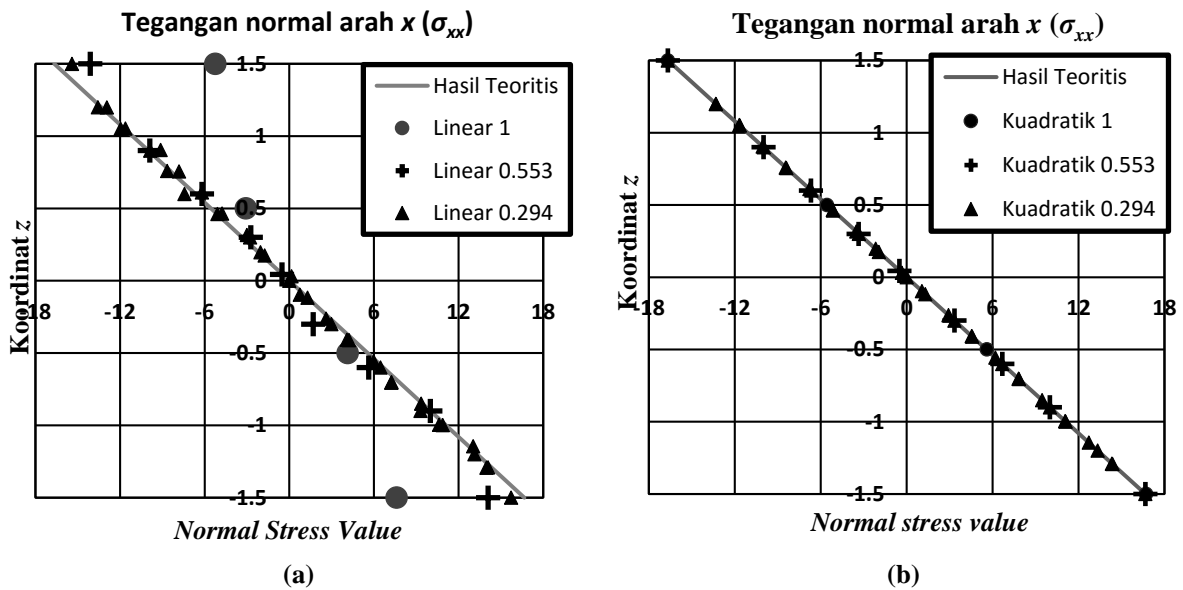
Tabel 1. Hasil Perbandingan *Vertical Displacement* pada Ujung *Beam* Hasil Analisis Program dengan Nilai Eksak dari Permasalahan *Cantilever Beam*

Analisa	Jumlah Mesh	Hasil Teoritis	Hasil Program	Normalized Displacement z
Linear	124	0.22685	0.16315	0.719
	698		0.20926	0.922
	5644		0.22376	0.986
Kuadratik	124		0.22857	1.008
	698		0.22888	1.009
	5644		0.22889	1.009

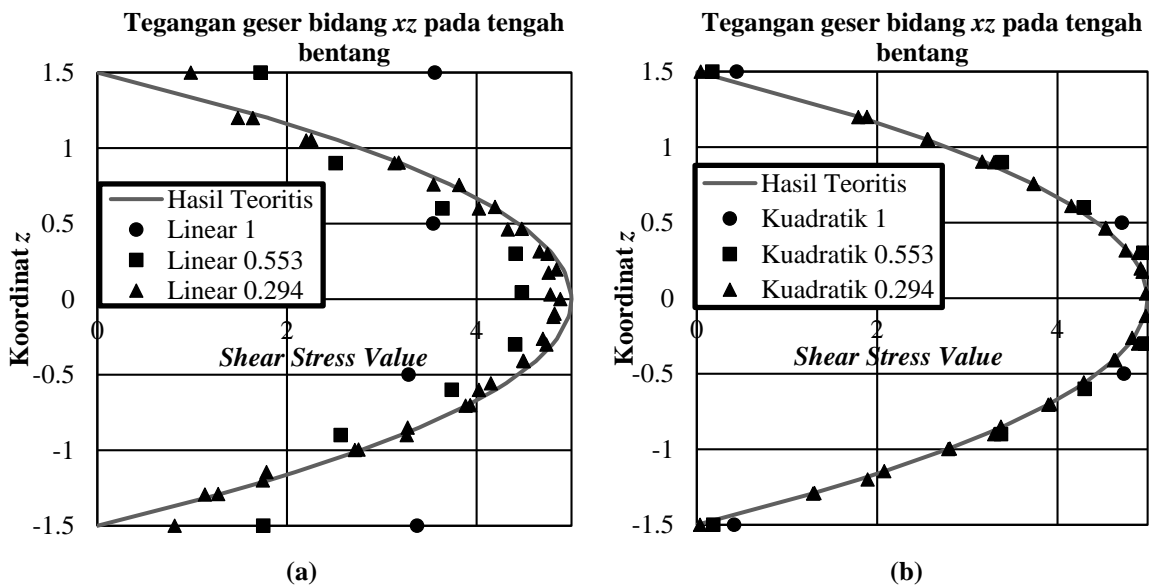
**Tabel 2. Hasil Perbandingan Strain Energy Hasil Analisis Program dengan Nilai Eksak dari Permasalahan Cantilever Beam**

Analisa	Jumlah Mesh	Hasil Teoritis	Hasil Program	Normalized Strain Energy
Linear	124	1.17593	0.72595	0.61735
	698		1.01963	0.86709
	5644		1.13821	0.96793
Kuadratik	124		1.17335	0.99781
	698		1.17547	0.99961
	5644		1.17563	0.99974

Hasil perbandingan analisa untuk tegangan normal arah  $x$  ( $\sigma_x$ ) dengan nilai eksak dari **Persamaan (3)** disajikan dalam **Gambar 3** dan tegangan geser bidang  $xz$  ( $\tau_{xz}$ ) dengan nilai eksak dari **Persamaan (4)** disajikan dalam **Gambar 4**. Hasil analisa tegangan merupakan hasil rata-rata pada tiap tingkatan koordinat  $z$  yang sama.

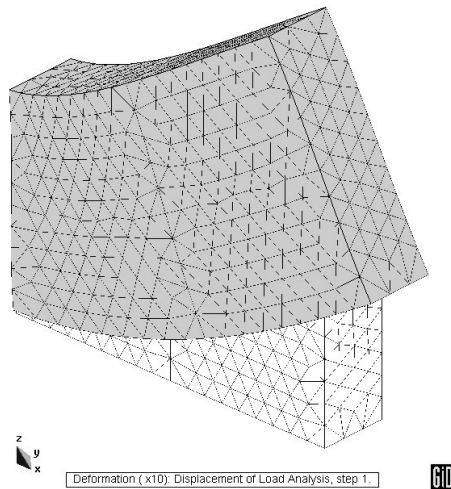


**Gambar 3 Grafik Perbandingan Tegangan Normal Arah  $x$  Cantilever Beam pada Tengah Bentang  $x = 2.5$ : (a) Hasil Perbandingan untuk Elemen Linear, (b) Hasil Perbandingan untuk Elemen Kuadratik**



**Gambar 4. Grafik Perbandingan Tegangan Geser Bidang  $xz$  Cantilever Beam pada Tengah Bentang  $x = 2.5$ : (a) Hasil Perbandingan untuk Elemen Linear, (b) Hasil Perbandingan untuk Elemen Kuadratik**

Hasil program yang telah dibuat dapat divisualisasikan dengan program GiD. Salah satu yang dapat diolah dari program GiD adalah penampilan *deform shape* dan *undeform shape*. Visualisasi *deform shape* dan *undeform shape* dari permasalahan *cantilever beam* ditunjukkan pada **Gambar 5**.

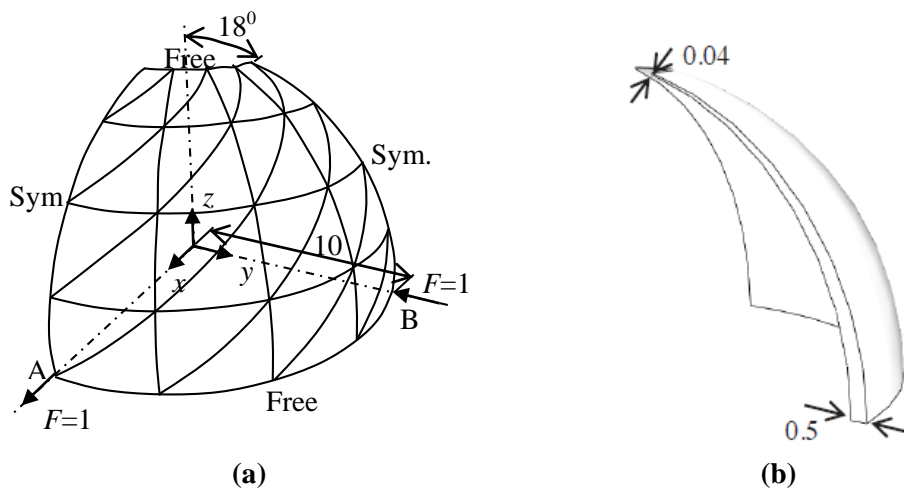


**Gambar 5. Visualisasi Deformasi Vertikal Akibat Beban pada Permasalahan *Cantilever Beam* dengan Program GiD**

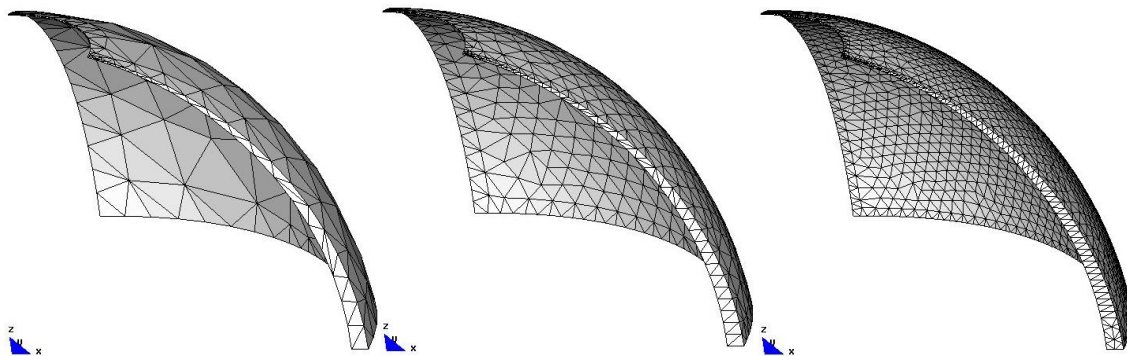
Untuk penggunaan elemen linear sudah menunjukkan performa yang baik pada analisis tegangan normal, namun untuk analisis tegangan geser elemen linear memerlukan banyak elemen untuk mendapatkan hasil yang mendekati eksak. Untuk elemen kuadratik secara keseluruhan sudah menunjukkan performa yang baik dengan hasil yang sudah mendekati eksak bahkan untuk penggunaan jumlah elemen yang paling sedikit.

#### 4.2. *Spherical Shell with Varying Thickness*

*Spherical shell with varying thickness* berupa cangkang yang berbentuk setengah bola dan memiliki ketebalan yang bervariasi antara 0.04 pada ketebalan atas hingga 0.5 pada ketebalan bawah, serta terpotong sebesar  $18^\circ$  terhadap sumbu  $z$  (Wong et al, 2015). Detail dari permasalahan *spherical shell with varying thickness* dapat dilihat pada **Gambar 6**. Permasalahan ini di-mesh dengan bantuan program GiD menggunakan 3 ukuran *mesh* yang berbeda, yakni ukuran *mesh* 1.75 dengan 659 elemen, ukuran *mesh* 0.75 dengan 2293 elemen, dan ukuran *mesh* 0.4 dengan 7888 elemen. Bentuk *mesh* dari beragam ukuran *mesh* yang digunakan pada permasalahan ini dapat dilihat pada **Gambar 7**.



**Gambar 6. Permasalahan *Spherical Shell with Varying Thickness* dengan Properti Material Isotropik  $E = 68.25 \times 10^6$  dan  $\nu = 0.3$ , (a) Geometri dan Pembebanan, (b) Ketebalan dari *Spherical Shell* yang Tidak Konstan (Wong et al, 2015)**



**Gambar 7. Visualisasi *mesh spherical shell with varying thickness* menggunakan program GiD: (a) *mesh* dengan 659 elemen, (b) *mesh* dengan 2293 elemen, (c) *mesh* dengan 7888 elemen.**

Pada permasalahan ini, hasil yang diuji adalah displacement pada masing-masing *quadrant* yang dikenai gaya. Hasil yang didapat dibandingkan dengan hasil referensi sebesar  $7.634 \times 10^{-5}$  (Wong et al, 2015). Hasil referensi dan hasil program yang dibandingkan adalah rata-rata perpindahan searah gaya pada *node* yang ada pada *quadrant* dari *spherical shell*. Hasil perbandingan nilai perpindahan searah gaya dapat dilihat pada **Tabel 3**.

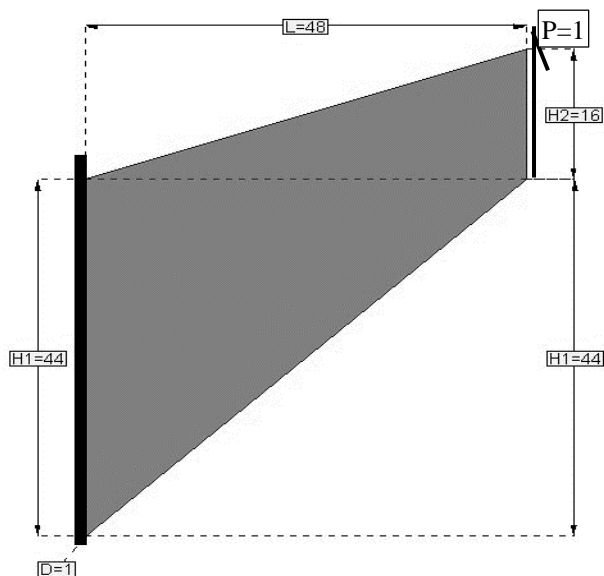
**Tabel 3. Perbandingan Perpindahan Searah Gaya pada *Quadrant* dari *Spherical Shell with Varying Thickness***

Analisa	Jumlah Elemen	Hasil Referensi	Hasil Program
Linear	659	7.634E-05	3.41E-06
	2293		1.72E-05
	7888		3.14E-05
Kuadratik	659		8.33E-05
	2293		9.96E-05
	7888		1.01E-04

Dari **Tabel 3** didapati bahwa hasil program menunjukkan hasil yang bervariasi. Untuk elemen linear, penggunaan *mesh* yang halus masih belum menunjukkan hasil yang mendekati eksak dengan nilai. Sedangkan untuk elemen kuadratik, hasil yang didapat menunjukkan bahwa terjadi konvergensi namun menuju hasil yang lebih tinggi dari hasil referensi. Kemungkinan hal ini terjadi karena bentuk geometri yang tipis. Kemungkinan lain juga dapat disebabkan karena penghalusan *mesh* pada arah ketebalan tidak menambah jumlah *node*.

#### **4.3. Cook Membrane**

Cook *membrane* merupakan balok yang memiliki geometri meruncing dan terjepit pada salah satu ujungnya. Permasalahan Cook *membrane* diuji dengan dua macam material, yakni material isotropik dan orthotropik (Cook et al, 2002). Detail permasalahan Cook *membrane* dapat dilihat pada **Gambar 8** dan **Tabel 4**. Cook *membrane* dibebani gaya sebesar 1 unit arah vertikal atas merata pada permukaan  $x = 48$ . Permasalahan di-*mesh* menggunakan program GiD dan digunakan 3 ukuran *mesh* yang berbeda untuk analisis. Ukuran *mesh* yang digunakan adalah ukuran *mesh* 8 dengan 553 elemen, ukuran *mesh* 4 dengan 959 elemen, dan ukuran *mesh* 2 dengan 2904 elemen.



Gambar 8. Geometri dari Cook Membrane

Tabel 4. Properti Material dari Permasalahan Cook Membrane

Material Isotropik		
$E = 1000$	$\nu = 0.25$	
Material Orthotropik		
$E_x = 250$	$\nu_{xy} = 0.15$	$G_{xy} = 600$
$E_y = 1000$	$\nu_{xz} = 0.25$	$G_{xz} = 1000$
$E_z = 400$	$\nu_{yz} = 0.1$	$G_{yz} = 400$

Pada permasalahan Cook membrane ini, hasil yang diuji adalah perpindahan vertikal pada ujung beam ( $x = 48$ ). Hasil yang didapat dari program dibandingkan dengan hasil referensi yang didapat dari program SAP2000 yakni sebesar 23.91 untuk penggunaan material isotropik dan 0.05276 untuk penggunaan material orthotropik. Hasil tersebut merupakan hasil rata-rata dari perpindahan vertikal node yang ada di ujung beam. Hasil perbandingan perpindahan vertikal pada penggunaan material isotropik dan orthotropik secara berturut dapat dilihat pada Tabel 5 dan Tabel 6. Hasil yang didapat dari program merupakan hasil rata-rata dari perpindahan vertikal di ujung beam.

Tabel 5. Perbandingan Perpindahan Vertikal Permasalahan Cook Membrane dengan Material Isotropik pada Ujung Beam ( $x = 48$ )

Analisa	Jumlah Mesh	Hasil Referensi	Hasil Program	Normalized Vertical Displacement
Linear	318	23.91	15.56	0.651
	664		22.52	0.942
	2947		23.61	0.987
Kuadratik	318		23.75	0.993
	664		23.94	1.001
	2947		24.00	1.004

Tabel 6. Perbandingan Perpindahan Vertikal Permasalahan Cook Membrane dengan Material Orthotropik pada Ujung Beam ( $x = 48$ )

Analisa	Jumlah Mesh	Hasil Referensi	Hasil Program	Normalized Vertical Displacement
Linear	553	0.05276	0.01920	0.36389
	959		0.04448	0.84315
	2904		0.04776	0.90521
Kuadratik	553		0.05188	0.98337
	959		0.05255	0.99593
	2904		0.5269	0.99866

Berdasarkan hasil analisis program, didapati bahwa hasil untuk orthotropik Cook membrane menunjukkan konvergensi dekat dengan hasil referensi. Untuk elemen linear menunjukkan performa yang baik dengan penambahan jumlah elemen dengan hasil perbaikan yang signifikan pada nilai normalized vertical displacement-nya. Untuk elemen kuadratik, hasil yang didapat tidak terlalu signifikan menaikkan nilai normalized vertical displacement-nya karena sudah mendekati hasil referensi.

## 5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil numerik dan analisa dari program, secara umum dapat ditarik kesimpulan bahwa algoritma untuk perhitungan analisis tegangan 3D menggunakan elemen linear dan kuadratik telah terimplementasikan dengan baik. Selain itu program yang telah dibuat dengan program MATLAB dan GiD dapat dijadikan alternatif untuk analisis permasalahan 3D *solid*. Secara umum hasil analisis dari program menunjukkan hasil yang diharapkan kecuali pada permasalahan dengan ketebalan yang tipis.

## 6. DAFTAR REFERENSI

- Centre Internacional de Mètodes Numèrics a l'Enginyeria, CIMNE (2002). *GiD v7.2.*, Barcelona, Spain.
- Cook, Robert D., Malkus, David S., Plesha, Michael E. & Witt, Robert J. (2002). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis* (4<sup>th</sup> ed.). John Wiley & Sons, Inc, Canada.
- Liu, G. R. & Quek, S. S. (2003). *The Finite Element Method - A Practical Course*. Butterworth-Heinemann, Oxford.
- Logan, Daryl L. (2007). *A First Course in the Finite Element Method* (4<sup>th</sup> ed.). Thomson Canada Limited, Canada.
- Pudjisuryadi, P. (2002). "Introduction to Meshless Local Petrov-Galerkin Method", *Dimensi Teknik Sipil*, 4, 112-116, Petra Christian University, Surabaya, Indonesia.
- The MathWork, Inc. (2010). *MATLAB R2010a*, Massachusetts, USA
- Wong, Foek Tjong., Christabel, Yosua., Pudjisuryadi, Pamuda., W. Kanok-Nukulchai. (2015). "Testing of Kriging-based finite element to shell structures with varying thickness", *The 5th International Conference of Euro Asia Civil Engineering Forum (EACEF-5)*, 2015. 843-849.