

## PENGEMBANGAN PENGHALUSAN JARING ELEMEN SEGITIGA REGANGAN KONSTAN SECARA ADAPTIF

Kevin Tjoanda<sup>1</sup>, Wong Foek Tjong<sup>2</sup>, Pamuda Pudjisuryadi<sup>3</sup>

**ABSTRAK :** Penelitian ini menghasilkan program matlab yang mampu melakukan penghalusan secara adaptif pada diskretisasi awal yang kasar sampai mendapatkan diskretisasi optimal dimana nilai error pada hasil analisisnya memenuhi syarat/target yang ditentukan. Elemen yang digunakan adalah elemen segitiga regangan konstan untuk menganalisa masalah tegangan dan regangan bidang. Pengujian program dilakukan dengan menggunakan berbagai *benchmark problems* yang disediakan oleh literature. Hasil pengujian menunjukkan bahwa parameter *strain energy error* dapat digunakan untuk perhitungan adaptifitas dan pada diskretisasi optimalnya menghasilkan nilai yang sangat mendekati solusi referensinya. Sebagian besar proses sudah dapat dilakukan secara otomatis namun untuk masalah tertentu diperlukan penyesuaian pada kondisi batas dan pembebanannya agar mengikuti diskretisasi baru. Masalah otomatisasi juga muncul pada struktur dengan sisi lengkung. Diskretisasi optimal pada akhir dari proses adaptifitas memang memberikan hasil yang mendekati eksak, namun karena menggunakan metode *element subdivision* dan alat bantu *delaunay triangulation*, maka terdapat ketidakefektifan yaitu banyak elemen yang ukurannya lebih kecil dari ukuran yang diperlukan.

**KATA KUNCI:** segitiga regangan konstan, error energi regangan, penghalusan adaptif, *element subdivision*, *meshing*, diskretisasi, matlab, *delaunay triangulation*

### 1. PENDAHULUAN

Perhitungan dengan metode elemen hingga membuka cakrawala bagi dunia konstruksi dimana struktur-struktur yang rumit dan tidak umum yang sebelumnya sangat sulit dianalisis dengan metode perhitungan konvensional, menjadi mungkin dianalisis dengan mudah dan cukup akurat. Struktur dengan kondisi batas dan geometri yang rumit dibagi menjadi elemen-elemen kecil yang lebih sederhana. Namun karena merupakan perhitungan numerik, hasil yang didapat dari metode elemen hingga memiliki error yang terakumulasi sehingga pada diskretisasi awalnya seringkali tidak memberikan hasil yang baik.

Dengan melakukan *refinement* (penghalusan), didapatkan hasil yang lebih akurat. Penghalusan dapat dilakukan secara manual maupun otomatis. Menurut Cook (1995), hasil analisis metode elemen hingga sudah menyimpan informasi tentang keakuratan perhitungan dengan diskretisasi tersebut, sehingga seberapa besar error yang terjadi dapat diketahui dan dijadikan dasar untuk penghalusan berikutnya. Hal ini amat berguna untuk pengujian konvergensi ataupun analisis umum dimana seringkali diperlukan beberapa kali penghalusan dengan menambah jumlah titik nodal, jumlah elemen, ataupun cara lainnya. Dengan adanya program penghalusan adaptif secara otomatis, maka pengguna tidak perlu. Diskretisasi yang dihasilkan pun merupakan diskretisasi yang optimal dimana jaring yang rapat ada region yang membutuhkan banyak elemen, sedangkan pada region yang sudah cukup baik, tidak dilakukan penghalusan lagi (Zienkiewicz, 2000)

---

<sup>1</sup> Mahasiswa Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, kevin\_tjoanda@yahoo.com.

<sup>2</sup> Dosen Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, wftjong@peter.petra.ac.id.

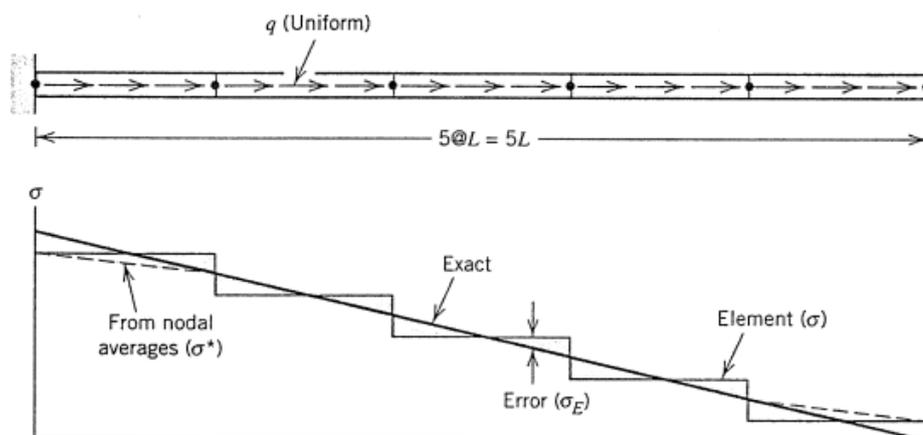
<sup>3</sup> Dosen Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, pamuda@peter.petra.ac.id.

Untuk penelitian kali ini, dilakukan studi untuk pemrograman adaptif untuk masalah tegangan bidang dan regangan bidang dengan menggunakan jaring elemen segitiga regangan konstan. Elemen ini merupakan salah satu elemen paling awal yang digunakan untuk analisis metode elemen hingga, sehingga juga memudahkan dalam perhitungan adaptif dan juga pemrograman untuk otomasinya. Penelitian ini dapat dikembangkan berikutnya dengan menggunakan elemen yang lebih kompleks dan akurat untuk hasil yang lebih baik. Sedangkan untuk alat bantu pemrogramannya sendiri menggunakan program Matlab versi 8.2.0.701 tahun 2013, dimana pemrograman untuk perhitungan sudah disediakan oleh Wong (2012) dan penulis mengembangkan lebih lanjut untuk adaptifitasnya.

## 2. PROSEDUR PERHITUNGAN *ERROR ESTIMATOR* DAN PENGHALUSAN ADAPTIF

Untuk mengukur tingkat error yang terdapat pada hasil perhitungan untuk dijadikan acuan pada diskretisasi berikutnya, digunakan parameter *strain energy error* yang dijelaskan oleh Cook (1995), didasarkan pada perbandingan tegangan diskontinyu dan tegangan kontinu hasil penghalusan tegangan elemen tersebut.

Misal, sebuah batang yang dijepit dan dibebani gaya tarik *uniform* searah sumbunya sepanjang bantang. Batang tersebut dimodelkan menjadi lima buah elemen linear yang tegangan di sepanjang elemen tersebut bernilai konstan. Diagram tegangan yang ada pada **Gambar 1** menunjukkan tegangan normal per elemen yang diskontinyu (garis konstan tiap elemen), tegangan normal yang telah dihaluskan sehingga kontinu (garis putus-putus), dan tegangan normal eksak hasil perhitungan konvensional (garis utuh).



**Gambar 1. Diagram Tegangan Diskontinyu, Kontinyu, dan Eksak untuk Batang Satu Dimensi**

**Langkah 1.** Setiap elemen CST memiliki 3 titik nodal di ujung-ujungnya. Langkah pertama yang dilakukan adalah mencari tegangan pada ketiga titik nodal tersebut dengan cara merata-rata tegangan pada semua elemen yang berbagi titik nodal sehingga didapatkan tegangan titik nodal rata-rata.

$$\sigma_{ave} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i \quad (2.1)$$

$\sigma_i$  = tegangan elemen diskontinyu

$\sigma_{ave}$  = tegangan rata-rata titik nodal

n = jumlah elemen yang berbagi titik nodal terkait

Tegangan rata-rata titik nodal yang didapat dari perhitungan di atas harus diinterpolasi menggunakan *shape function* untuk mendapatkan fungsi tegangan pada elemen dimaksud.

$$\sigma_i^* = \sum_{i=1}^n N_i(\sigma_e)_i \quad (2.2)$$

$\sigma_i^*$  = tegangan kontinyu elemen

$N_i$  = shape function untuk mengubah tegangan rata-rata titik nodal menjadi fungsi tegangan kontinyu pada elemen.

Selisih dari tegangan diskontinyu hasil analisa metode elemen hingga dengan tegangan kontinyu pada suatu elemen disebut sebagai error tegangan yang nantinya akan digunakan untuk mendapatkan error energi regangan

$$\sigma_{E_i} = \sigma_i - \sigma_i^* \quad (2.3)$$

$\sigma_{E_i}$  = besar *error* tegangan tiap elemen

Dengan menggunakan error tegangan tiap elemen, didapatkan besaran error energi regangan untuk elemen tersebut.

$$\begin{aligned} \|e\|_i^2 &= h \int \sigma_{E_i}^T \varepsilon_i dA \\ \|e\|_i^2 &= h \int (\sigma_i - \sigma_i^*)^T \varepsilon_i dA \end{aligned} \quad (2.4)$$

Karena  $\sigma_i^*$  merupakan matriks tegangan kontinyu yang berupa fungsi, maka persamaan di atas diselesaikan dengan menggunakan integral numerik untuk segitiga. Sedangkan untuk keseluruhan struktur, error energi regangan keseluruhan merupakan hasil penjumlahan dari seluruh error energi regangan per elemen

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^m h \int (\sigma_i - \sigma_i^*)^T \varepsilon_i dA = \sum_{i=1}^m \|e\|_i^2 \quad (2.5)$$

$m$  = jumlah elemen keseluruhan

$\|e\|_i^2$  = error energi regangan per elemen

$\|U\|^2$  = energi regangan keseluruhan

$\|e\|^2$  = error energi regangan keseluruhan

**Langkah 2.** Energi regangan keseluruhan hasil analisa MEH dan hasil dari error tegangan dinormalisasi dengan menggunakan *Root Mean Square* sehingga menghasilkan nilai error relatif keseluruhan.

$$\eta = \sqrt{\frac{\|e\|^2}{\|U\|^2 + \|e\|^2}} \quad (2.6)$$

$$\|U\|^2 = \sum_{i=1}^m h \int \sigma_i^T \varepsilon_i dA \quad (2.7)$$

Nilai pembilang pada persamaan 2.32 yaitu  $\|U\|^2 + \|e\|^2$  dianggap merupakan pendekatan pada energi regangan eksak. Akar dan kuadrat digunakan untuk mengaitkan nilai  $\eta$  dengan tegangan, karena energi regangan pada dasarnya merupakan hasil pengkuadratan dari tegangan.

Karena penghalusan yang diinginkan adalah penghalusan adaptif dengan metode *element subdivision*, maka diperlukan nilai error yang diijinkan dan yang terjadi per elemen untuk menentukan elemen mana yang perlu dihaluskan, sebagai berikut:

$$\|e\|_{ijin} = \eta_{all} \sqrt{\frac{\|U\|^2 + \|e\|^2}{m}} \quad (2.8)$$

$\eta_{all}$  = nilai relatif error keseluruhan yang diinginkan oleh pengguna, biasanya diambil 0.05

$\|e\|_{ijin}$  = nilai error elemen yang diijinkan, berlaku untuk seluruh elemen

$m$  = jumlah elemen pada struktur

**Langkah 3.** Dengan membandingkan nilai error per elemen yang terjadi dengan nilai error yang diijinkan untuk satu elemen, didapatkan:

$$\zeta_i = \frac{\|e\|_i}{\|e\|_{jin}} \quad (2.9)$$

Karena  $\zeta_i$  merupakan perbandingan dari error yang terjadi terhadap error yang diijinkan, maka nilai terbaik dari  $\zeta_i = 1$ . Bila nilai  $\zeta_i > 1$ , maka elemen tersebut terlalu besar sehingga diperlukan penghalusan. Maka, dinyatakan bahwa diskretisasi sudah cukup baik ketika  $\zeta_i$  seluruh elemen  $\leq 1$  dan iterasi dapat dihentikan.

### 3. ALGORITMA PEMROGRAMAN

**Proses Masukan**, meliputi tahap awal dimana pengguna memasukkan seluruh informasi yang diperlukan oleh program untuk melakukan perhitungan Metode Elemen Hingga maupun untuk proses adaptifitas.

**Proses Perhitungan**, dimana dilakukan proses perhitungan standar metode elemen hingga dengan elemen CST untuk masalah regangan bidang atau tegangan bidang.

**Keluaran** dari perhitungan adalah perpindahan titik nodal, reaksi perletakan, tegangan, regangan, dan energi regangan. Parameter-parameter ini berikutnya akan digunakan untuk penentuan kriteria error untuk proses adaptifitas. Hasil keluaran ini juga dapat digambarkan berupa grafik untuk memudahkan pemeriksaan.

**Perhitungan Error**, dimana keluaran dari perhitungan sebelumnya diolah lebih lanjut untuk menentukan nilai error dari diskretisasi awal dan area mana saja yang perlu dihaluskan. Prosesnya adalah sebagai berikut:

- Menghitung tegangan rata-rata pada tiap titik nodal dan menginterpolasi tegangan rata-rata titik nodal tersebut menjadi fungsi tegangan kontinyu pada elemen dengan menggunakan shape function
- Menghitung selisih antara tegangan hasil analisis MEH dan tegangan kontinyu untuk mendapatkan error tegangan. Dengan menggunakan error tegangan, dihitung error energi regangan untuk tiap elemen yang diintegrasikan dengan cara numerik
- Menjumlahkan error energi tegangan per elemen untuk mendapatkan error energy regangan keseluruhan (global), kemudian menghitung error energi regangan yang diijinkan untuk satu elemen dengan syarat error relatif yang diinput oleh pengguna. Biasanya sebesar 5%
- Membandingkan error energi regangan per elemen yang terjadi dengan error energi regangan yang diijinkan dengan cara normalisasi sehingga nilai idealnya adalah satu
- Menentukan elemen yang perlu dihaluskan dan elemen yang sudah memenuhi kriteria error dan menggambarkan grafik yang tiap elemennya ditandai dengan besar normal error dan warnanya
- Menggambarkan kondisi elemen untuk membedakan elemen yang perlu dihaluskan dan yang tidak

**Proses Penghalusan Adaptif**. Setelah menemukan nilai error untuk setiap elemen, akan dibila masih ada elemen yang besar normal errornya lebih dari satu, maka akan dilakukan penghalusan. Kondisi ini akan ditandai dengan adanya angka satu pada gambar kondisi elemen.

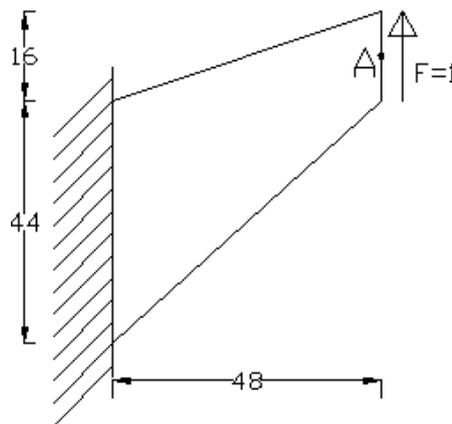
Algoritmanya adalah sebagai berikut:

- Mendeteksi elemen yang perlu dihaluskan dan menambah titik nodal pada masing-masing bagian tengah dari ketiga sisi elemen tersebut dengan cara merata-ratakan koordinat dari dua titik nodal, baik pada sumbu X maupun Y.
- Melakukan diskretisasi otomatis untuk seluruh elemen berdasarkan konfigurasi titik nodal yang baru dengan memanfaatkan fungsi *delaunay triangulation* yang disediakan matlab. Fungsi ini langsung menghasilkan elemen segitiga yang titik-titik sudutnya adalah titik-titik nodal terdekat, sehingga menghilangkan secara total diskretisasi sebelumnya
- Dilakukan penyesuaian secara manual untuk kondisi batas dan gaya nodal ekuivalen. Untuk geometri tertentu, perlu juga dilakukan penyesuaian terhadap konfigurasi elemennya.

- d. Kembali melakukan proses perhitungan dari awal dengan menggunakan perhitungan standar metode elemen hingga sampai mengecek nilai error dan kondisi dari tiap elemen.

#### 4. HASIL PERCOBAAN

Pengujian dilakukan dengan sebuah balok kantilever yang dimensinya berubah dalam arah x dan y (*tapered*). Karakteristik materialnya antara lain  $E=1$ ,  $\nu=1/3$ ,  $t=1$ . Hasil perpindahan vertikal pada titik A yang didapatkan dari penghalusan adaptif akan dibandingkan dengan hasil yang eksak, yakni 23,91. Dengan melihat geometri, kondisi batas serta pembebanan dari struktur, maka diharapkan hasil dari penghalusan adaptif adalah diskretisasi yang rapat pada daerah perletakan dan sisi bawah balok dimana terjadi konsentrasi tegangan.



**Gambar 2** Permasalahan *Cook's Tapered Beam*

Diskretisasi awal merupakan diskretisasi yang kasar dengan jumlah titik nodal dan elemen yang sedikit, sehingga semuanya masih memiliki nilai error yang relatif besar. Setelah melakukan beberapa kali penghalusan, didapatkan diskretisasi optimal dimana  $\zeta_i \leq 1$ , yang berarti nilai error yang terjadi lebih kecil dari nilai error yang diijinkan. Hasil analisa akan ditampilkan dalam bentuk tabel, grafik, dan gambar untuk setiap diskretisasi. Pada gambar, elemen yang telah mencapai nilai tersebut ditandai dengan angka 0 (nol), sedangkan elemen yang masih perlu dihaluskan ditandai dengan angka 1 (satu).

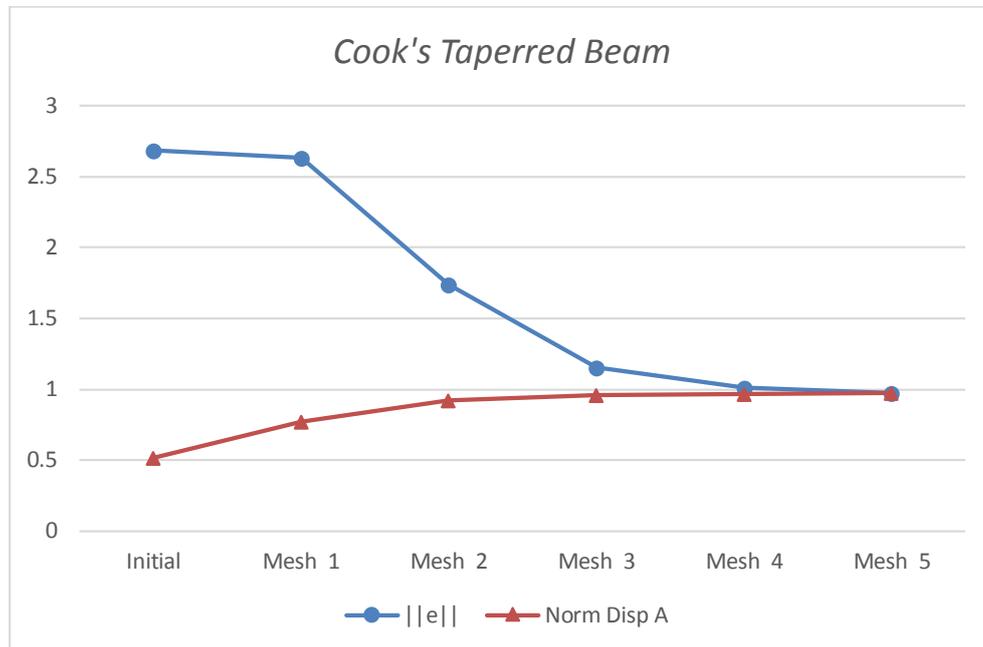
Dengan menetapkan nilai  $\eta_{all} = 5\%$  dengan 3 *sampling points* untuk integral numerik segitiga, didapatkan hasil pengujian yang dapat dilihat pada **Tabel 1**:

**Tabel 1.** Hasil Pengujian untuk *Cook's Tapered Beam*

	Jumlah node	Jumlah elemen	$\ e\ $	Disp A	Norm Disp A
Awal	9	8	2.6889	12.30173	0.514501
Mesh 1	23	30	2.6333	18.47801	0.772815
Mesh 2	62	100	1.7398	21.99935	0.92009
Mesh 3	142	247	1.1563	22.93645	0.959283
Mesh 4	182	324	1.0122	23.16268	0.968745
Mesh 5	197	353	0.9709	23.24567	0.972215

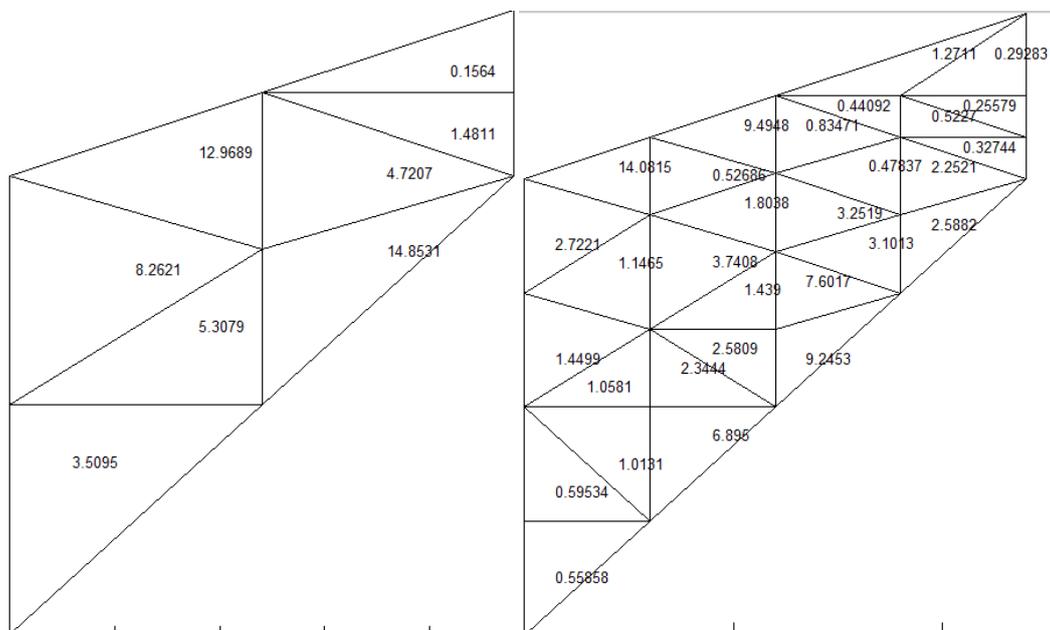
$\|e\|$  : error energi regangan keseluruhan yang terjadi untuk setiap diskretisasi  
 Disp A : perpindahan titik nodal arah Y pada titik A dimana solusi referensinya adalah 23.91  
 Norm Disp A : normalisasi dari nilai perpindahan yang terjadi pada setiap diskretisasi

Perbandingan nilai error energi regangan dan normalisasi nilai perpindahan untuk setiap diskretisasi dapat dilihat pada **Gambar 3**.

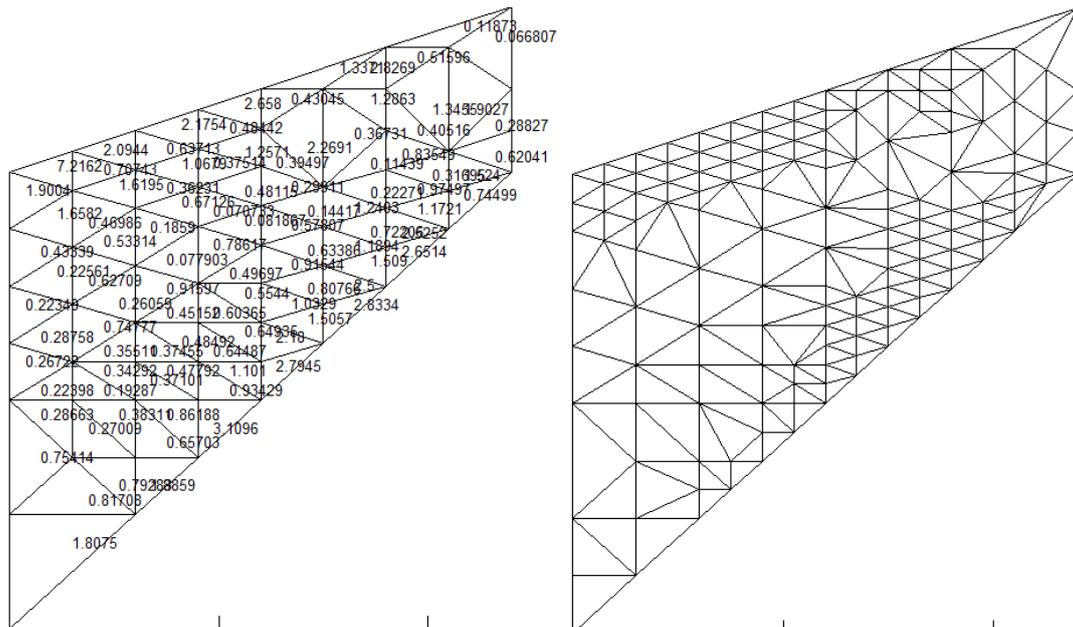


**Gambar 3. Nilai Error Energi Regangan dan Normalisasi Nilai Perpindahan**

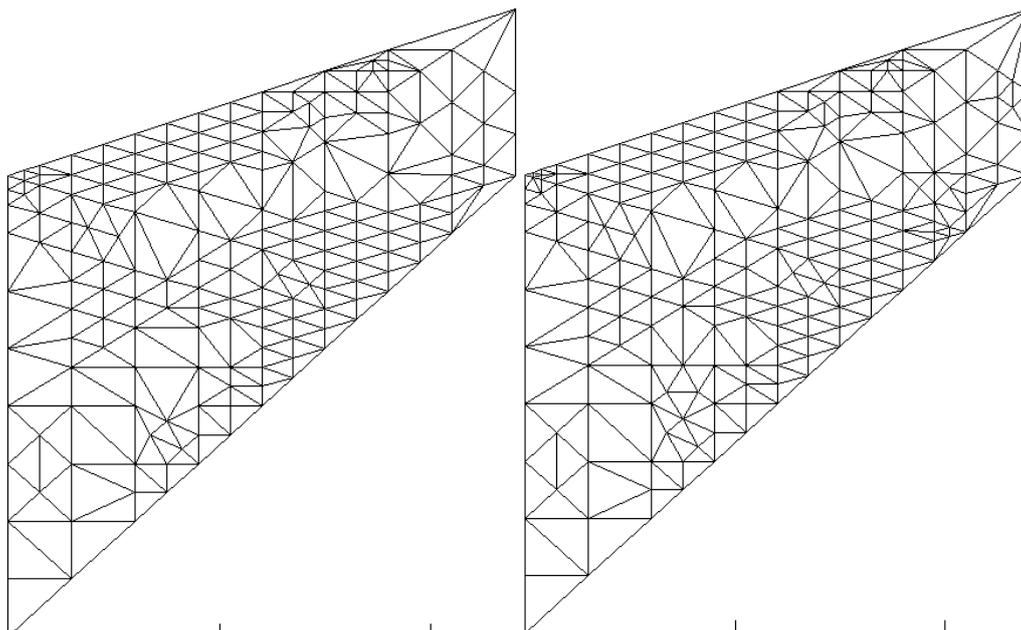
Berikut adalah gambar yang dihasilkan oleh program matlab untuk konfigurasi elemen, nilai  $\xi_i$ , serta kondisi elemen. Nilai  $\xi_i$  hanya ditampilkan sampai penghalusan kedua karena setelahnya akan sulit terbaca. Sedangkan kondisi elemen hanya akan ditampilkan untuk diskretisasi awal dan penghalusan kelima dimana seluruh elemen telah memenuhi kriteria error yang ditetapkan.



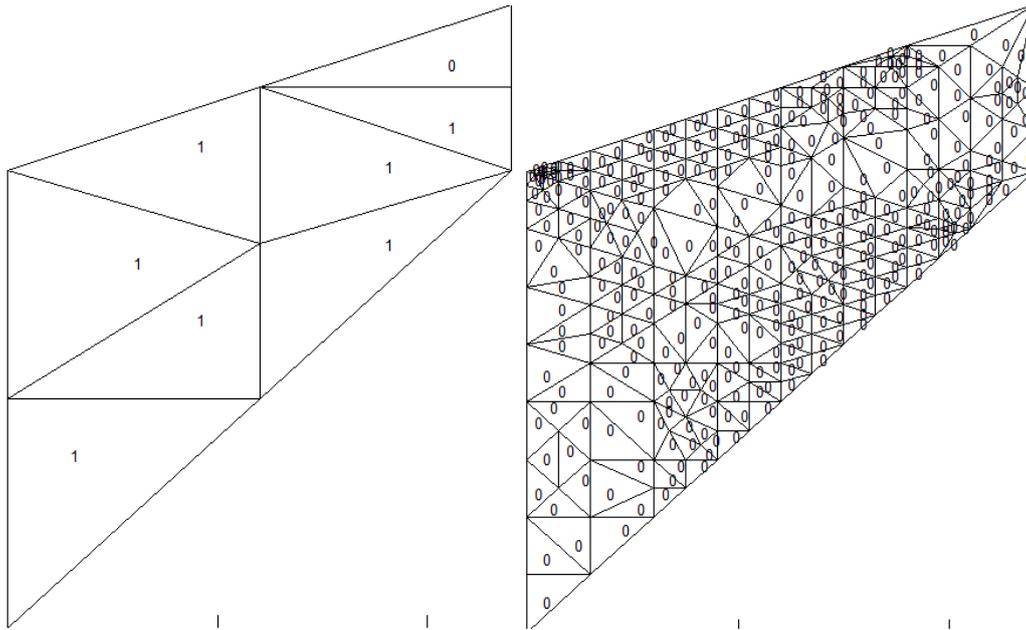
**Gambar 4. Nilai  $\xi_i$  untuk Setiap Elemen pada Diskretisasi Awal dan Penghalusan Pertama**



**Gambar 5. Nilai  $\xi$  untuk Setiap Elemen Penghalusan Kedua dan Konfigurasi Elemen Penghalusan Ketiga**



**Gambar 6. Konfigurasi Elemen untuk Penghalusan Kelima dan Keenam**



**Gambar 7. Kondisi Elemen untuk Diskretisasi Awal dan Penghalusan Pertama**

## 5. KESIMPULAN

Penghalusan jaring elemen segitiga regangan konstan secara adaptif telah berhasil dikembangkan, dan berdasarkan hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa:

1. Untuk pengujian konvergensi perbandingan hasil dari berbagai diskretisasi, penghalusan adaptif yang telah diotomatisasi sangat berguna karena mempercepat waktu penghalusan lanjutannya.
2. Parameter *strain energy error* dan metode *h-refinement element subdivision* terbukti cukup akurat untuk penghalusan adaptif.
3. Diperlukan penelitian lebih lanjut untuk elemen yang lebih baik dan proses otomatisasi yang lebih menyeluruh

## 6. DAFTAR REFERENSI

- Cook, R.D. (1995). *Finite Element Modelling for Stress Analysis*, (4th edition). University of Wisconsin, John Wiley and Sons, Madison.
- Wong, F.T. (2012). *Bahan Ajar Perkuliahan Metode Elemen*. Universitas Kristen Petra, Surabaya
- Zienkiewicz, O.C., R.L. Taylor. (2000). *The Finite Element Method Volume 1 : The Basis*, (5th edition). Butterworth-Heinemann.