

PENGEMBANGAN ELEMEN BALOK TIMOSHENKO BERBASIS KRIGING BEBAS *LOCKING* UNTUK ANALISIS STABILITAS DAN GETARAN BEBAS

Adam Sulistio¹ dan Wong Foek Tjong²

ABSTRAK : Metode Elemen Hingga berbasis Kriging (MEH-K) adalah Metode Elemen Hingga (MEH) jenis baru yang menggunakan Interpolasi Kriging untuk membentuk *shape function*-nya. Penggunaan interpolasi Kriging secara umum menunjukkan hasil yang lebih akurat pada suatu analisa struktur dibandingkan dengan penggunaan *shape function* MEH standar dengan diskritisasi yang sama. Adanya penelitian ini adalah untuk mengembangkan suatu elemen balok Timoshenko berbasis Kriging yang diharapkan dapat bebas dari fenomena *shear locking*. Batasannya adalah pada analisis statik, getaran bebas, dan stabilitas saja. Dari penelitian ini, didapatkan bahwa fenomena *shear locking* pada elemen balok Timoshenko berbasis Kriging dan dapat diatasi secara efektif dengan menggunakan metode *Discrete Shear Gap* (DSG), sedangkan metode *Modified Field Matching* (MFM) gagal dalam upaya mengeliminasi *shear locking*. Hasil analisa yang ditunjukkan juga membuktikan bahwa MEH-K dengan DSG menghasilkan hasil yang sangat akurat, baik untuk analisis statik, getaran bebas, maupun analisa stabilitas.

KATA KUNCI: metode elemen hingga, interpolasi Kriging, balok Timoshenko, analisis statik, analisis getaran bebas, analisis stabilitas, *shape function*, *shear locking*, *discrete shear gap*, *modified field matching*

1. PENDAHULUAN

Metode elemen hingga berbasis Kriging (MEH-K) adalah Metode Elemen Hingga (MEH) yang menggunakan interpolasi Kriging dalam pembentukan *shape function*-nya, dimana dalam pembentukannya tidak hanya menggunakan titik nodal dalam suatu elemen saja, namun juga elemen-elemen disekitar elemen tersebut dalam suatu *domain of influence* (DOI). MEH-K memiliki kelebihan – kelebihan yang dimiliki oleh metode *mesh-free*, yaitu hasilnya yang lebih akurat dan dapat dengan mudah mendapatkan *shape function* berderajat tinggi, namun tetap memiliki prosedur perhitungan yang sama dengan MEH. Syamsoeyadi (2009) telah mengembangkan MEH-K untuk analisa statis dan getaran bebas untuk elemen balok Timoshenko satu dimensi. Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa elemen dengan basis *cubic* memberikan hasil yang baik untuk analisa statis dan getaran bebas. *Shear locking* dapat dihilangkan dengan metode *Selective Reduced Integration* (SRI), namun hasil gaya geser yang dihasilkan oleh metode ini hanya akurat pada lokasi titik contoh untuk integrasi numerik yang bertujuan untuk mendapatkan matriks kekakuan geser elemen. Selain itu, juga telah dibuktikan bahwa metode SRI tidak dapat diterapkan untuk perhitungan elemen pelat segitiga Reissner-Mindlin menggunakan MEH-K (Wong & Kanok-Nukulchai, 2006). Untuk itu, diperlukan metode lain untuk dapat menghilangkan fenomena *shear locking* pada balok Timoshenko berbasis Kriging yang menghasilkan gaya geser yang akurat dan dapat digunakan untuk pelat Reissner-Mindlin. Dalam penelitian ini, akan dilakukan pengujian terhadap metode *Discrete Shear Gap* (DSG), yang telah terbukti dapat menghilangkan fenomena *shear locking* pada pelat dan cangkang (Bletzinger et al, 1998) dan metode *Modified Field Matching* (MFM) (Wong, 2007) yang merupakan modifikasi dari metode

¹ Mahasiswa Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, adamsulistio@gmail.com

² Dosen Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, wftjong@petra.ac.id

Field Matching (FM) yang digunakan dalam disertasi Wong (2009). Penelitian juga dilakukan untuk mengembangkan balok Timoshenko berbasis Kriging untuk analisis stabilitas.

2. METODE ELEMEN HINGGA BERBASIS KRIGING (MEH-K)

Interpolasi Kriging adalah teknik geostatistik untuk interpolasi ruang yang banyak digunakan dalam ilmu geologi dan pertambangan, dimana nama Kriging diambil dari nama seorang insiyur pertambangan Afrika Selatan bernama Danie G. Krige (Tongsuk and Kanok-Nukulchai, 2004a, Gu, 2003, Olea, 1999, p.8). Dengan menggunakan interpolasi ini maka semua titik yang tidak diketahui nilainya dapat di interpolasi dari nilai – nilai yang telah diketahui di sekitar titik tersebut. Dalam bagian ini akan dibahas konsep dasar mengenai interpolasi Kriging secara singkat.

Dalam sebuah domain Ω , terdapat sejumlah titik – titik $\mathbf{x}_i, i=1, 2, \dots, N$, dimana N merupakan jumlah dari titik – titik tersebut dan fungsi dari nilai \mathbf{x} tersebut dapat dinyatakan sebagai $u(\mathbf{x})$. Untuk sebuah titik sembarang \mathbf{x}_0 , nilai dari $u(\mathbf{x}_0)$ diasumsikan dipengaruhi oleh titik – titik di sekitarnya dalam sebuah subdomain yang diberi nama *domain of influence* (DOI).

Nilai $u(\mathbf{x}_0)$ diasumsikan dapat dihitung dengan nilai estimasi u^h yang merupakan penjumlahan linier $u(\mathbf{x}_1), \dots, u(\mathbf{x}_n)$, sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$u^h(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(\mathbf{x}_i) \quad (1)$$

dimana λ_i adalah bobot Kriging masing-masing titik dalam DOI, dan n adalah jumlah titik dalam DOI. Dalam Interpolasi Kriging, fungsi deterministik $u(\mathbf{x})$ dapat dianggap sebagai realisasi dari fungsi acak $U(\mathbf{x})$. Maka persamaan (1) dapat ditulis sebagai berikut :

$$U^h(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i U(\mathbf{x}_i) \quad (2)$$

Menggunakan metode pengali *Lagrange* untuk permasalahan *constrained optimization*, persyaratan – persyaratan Bobot Kriging, maka dapat dirumuskan sistem persamaan Kriging. Penurunan perumusan sistem persamaan Kriging yang lengkap dan jelas dapat dilihat pada F.T. Wong (2009). Perumusan sistem persamaan Kriging adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{P}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{r}(\mathbf{x}_0) \quad (3)$$

$$\mathbf{P}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{p}(\mathbf{x}_0) \quad (4)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} C(\mathbf{h}_{11}) & \dots & C(\mathbf{h}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(\mathbf{h}_{n1}) & \dots & C(\mathbf{h}_{nn}) \end{bmatrix}; \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & \dots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & \dots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}; \boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \dots \lambda_n]^T; \boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \dots \mu_n]^T$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}_0) = [C(\mathbf{h}_{10}) \ C(\mathbf{h}_{20}) \ \dots \ C(\mathbf{h}_{n0})]^T; \mathbf{p}(\mathbf{x}_0) = [p_1(\mathbf{x}_0) \ \dots \ p_m(\mathbf{x}_0)]^T$$

\mathbf{R} adalah matriks kovarians $U(x)$ di titik-titik x_1, \dots, x_n dalam DOI yang berdimensi $n \times n$. \mathbf{P} adalah matriks nilai polinomial pada titik-titik yang berdimensi $n \times m$. $\boldsymbol{\lambda}$ adalah vektor $n \times 1$ yang berisi bobot Kriging titik-titik nodal tersebut. $\boldsymbol{\mu}$ adalah vektor $m \times 1$ yang berisi nilai pengali Lagrange. $\mathbf{r}(\mathbf{x}_0)$ adalah vektor $n \times 1$ yang berisi nilai kovarians antara setiap titik dengan titik yang ditinjau. $\mathbf{p}(\mathbf{x}_0)$ adalah vektor $m \times 1$ yang berisi basis polinomial di titik \mathbf{x}_0 . Sementara $C(\mathbf{h}_{ij}) = \text{cov}[U(x_i), U(x_j)]$ adalah nilai kovarians antara nilai $U(x)$ pada titik x_i dan nilai $U(x)$ pada titik x_j . Bobot Kriging $\boldsymbol{\lambda}$ yang tidak diketahui dapat dicari menggunakan persamaan (3) dan (4). Selanjutnya nilai $\boldsymbol{\lambda}$ dimasukkan kedalam persamaan (1). Berikut adalah persamaan (1) ditulis dalam bentuk matriks:

$$u^h(\mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{d} \quad (5)$$

Dimana $\mathbf{d} = [u(x_1) \ \dots \ u(x_n)]^T$ adalah vektor $n \times 1$ yang berisi nilai $u(x)$ dari setiap titik nodal. Oleh karena titik \mathbf{x}_0 dapat berupa titik sembarang dalam DOI, maka \mathbf{x}_0 dapat ditulis sebagai \mathbf{x} saja. Dalam MEH, persamaan ini identik dengan hubungan antara *shape function* dengan perpindahan setiap titik nodal, sehingga persamaan (5) dapat ditulis sebagai berikut:

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{d} = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x})u_i \quad (6)$$

Dimana $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\lambda}^T$ adalah matriks yang berisi *shape function* setiap titik nodal dalam DOI. Adapun definisi dari *shape function* adalah suatu fungsi di dalam sebuah elemen apabila derajat kebebasan ke- i elemen bernilai satu dan derajat kebebasan lainnya bernilai nol (Cook, 1989).

Untuk membuat *shape function* Kriging dalam persamaan (6), diperlukan pemilihan fungsi basis polinomial dan fungsi korelasi. Penggunaan fungsi basis polinomial berderajat 1 sampai 3 telah dicoba dalam penelitian Syamsoeyadi (2009). Dari penelitian tersebut didapatkan bahwa penggunaan fungsi

basis polinomial yang paling baik dari ketiga fungsi basis tersebut untuk elemen balok Timoshenko berbasis Kriging adalah fungsi basis *cubic*. Dalam MEH-K dikenal 2 macam fungsi korelasi yaitu *Gaussian* dan *Quartic Spline*. Masing-masing fungsi korelasi memiliki perumusan yang berbeda, yang dapat dilihat pada Syamsoeyadi (2009). Selain itu juga dibutuhkan parameter korelasi θ yang berbeda untuk setiap fungsi basis dan fungsi korelasi yang digunakan, dan telah diteliti batas atas dan batas bawahnya oleh Syamsoeyadi (2009). Dalam penelitian ini nilai parameter korelasi diambil sama dengan nilai tengah antara batas atas dan batas bawah.

3. PERSAMAAN GERAK BALOK TIMOSHENKO

Asumsi dasar dari balok Timoshenko adalah setelah terjadi deformasi pada balok, bidang datar penampang tetaplah berupa suatu bidang datar, namun tidak harus berarah normal terhadap garis netral penampang tersebut (Reddy, 2006). Teori ini mengikutsertakan adanya regangan geser dan inersia rotasi. Menurut Kosmatka (1995) untuk balok Timoshenko besarnya perpindahan untuk arah x dan arah z (arah y tidak ditinjau) dapat ditulis sebagai berikut:

$$u = -z\theta(x, t) \quad (7a)$$

$$w = w(x, t) \quad (7b)$$

Dimana u adalah perpindahan aksial yang sejajar arah balok, w adalah perpindahan lateral yang tegak lurus arah balok, dan θ adalah rotasi penampang balok. Komponen regangan yang tidak nol adalah sebagai berikut:

$$\varepsilon_{xx} = -z\theta_{,x} \quad (8a)$$

$$\gamma_{xz} = w_{,x} - \theta \quad (8b)$$

Dimana ε_{xx} adalah regangan normal balok pada arah x dan γ_{xz} adalah regangan geser balok. Tanda koma berarti turunan parsial pertama terhadap variabel disebelahnya. Persamaan gerak balok dapat diturunkan menggunakan prinsip Hamilton, yang membentuk persamaan bentuk lemah dari balok Timoshenko, yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\int_0^L \delta\theta_{,x} EI \theta_{,x} dx + \int_0^L (\delta w_{,x} - \delta\theta) kGA(w_{,x} - \theta) dx + P \int_0^L w_{,x} \delta w_{,x} dx + \int_0^L \delta w \rho A \ddot{w} dx + \int_0^L \delta\theta \rho I \ddot{\theta} dx = \int_0^L \delta w q dx + \int_0^L \delta\theta m dx \quad (9)$$

Dimana tanda *double dot* (dua titik berturut-turut) diatas variabel merupakan turunan kedua variabel tersebut terhadap waktu. Gaya momen dan geser dapat dihitung melalui defleksi w dan rotasi θ , melalui persamaan:

$$M = EI\theta_{,x} \quad (10a)$$

$$Q = kGA(w_{,x} - \theta) \quad (10b)$$

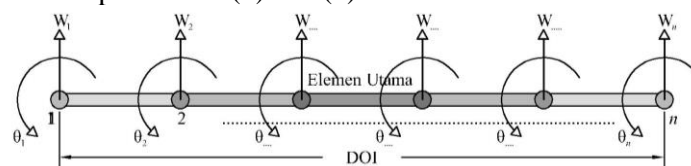
4. PERUMUSAN BALOK TIMOSHENKO BERBASIS KRIGING

Sebuah elemen balok Timoshenko dalam sebuah DOI ditunjukkan dalam **Gambar 1**. Perpindahan defleksi dan rotasi setiap titik dalam DOI dinyatakan dalam persamaan:

$$w = [N_w] [D] \quad (11a)$$

$$\theta = [N_\theta] [D] \quad (11b)$$

dimana $N_w = [N_1 \ 0 \ N_2 \ 0 \ \dots \ N_n \ 0]$ dan $N_\theta = [0 \ N_1 \ 0 \ N_2 \ \dots \ 0 \ N_n]$ yang masing-masing adalah *shape function* yang menghubungkan perpindahan titik nodal elemen (w dan θ) dengan perpindahan titik nodal struktur $D = [w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2 \ \dots \ w_n \ \theta_n]^T$. Nilai-nilai *shape function* tersebut (N_1, N_2, \dots, N_n) adalah nilai *shape function* Kriging yang didapatkan dari persamaan (3) dan (4).



Gambar 1. Elemen balok Timoshenko dalam sebuah DOI

Persamaan dinamis gerak balok tanpa redaman (*damping*) adalah sebagai berikut:

$$[M]\{\ddot{D}(t)\} + [K + P[K_g]]\{D(t)\} = \{F(t)\} \quad (12)$$

Dimana $[M]$, $[K]$, $[K_g]$, dan $\{F(t)\}$ masing-masing adalah matriks massa konsisten, kekakuan, kekakuan geometris, dan gaya titik nodal yang bekerja pada balok. Adapun P adalah gaya aksial tarik yang diterima balok. Masing-masing matriks $[M]$, $[K]$, $[K_g]$, dan $\{F(t)\}$ tersebut dinyatakan dalam persamaan:

$$[M] = \int_0^L [N_w]^T \rho A [N_w] dx + \int_0^L [N_\theta]^T \rho I [N_\theta] dx \quad (13a)$$

$$[K] = \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial x} [N_\theta] \right]^T EI \left[\frac{\partial}{\partial x} [N_\theta] \right] + \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial x} [N_w] - [N_\theta] \right]^T kGA \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} [N_w] - [N_\theta] \right] dx \quad (13b)$$

$$[K_g] = \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial x} [N_w] \right]^T \left[\frac{\partial}{\partial x} [N_w] \right] dx \quad (13c)$$

$$\{F\} = \int_0^L [N_w]^T q dx + [N_\theta]^T m dx \quad (13d)$$

Untuk analisa statis dan stabilitas, persamaan (12) dapat disederhakan menjadi:

$$[K + P[K_g]]\{D\} = \{F\} \quad (14)$$

Dalam analisa statis, nilai gaya aksial yang bekerja dianggap nol, sehingga menghasilkan persamaan:

$$[K]\{D\} = \{F\} \quad (15)$$

Untuk analisa stabilitas dalam mencari gaya tekan kritis, gaya luar yang bekerja $\{F\}$ dianggap sama dengan nol, dan persamaan ini menjadi sebuah permasalahan eigen yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$[K - P[K_g]]\{D\} = \{0\} \quad (16)$$

Nilai gaya tekan kritis didapatkan dari *eigen value* positif terkecil, dan *eigen vector* yang bersangkutan adalah bentuk perpindahan balok setelah berdeformasi tekuk akibat gaya tekan. Untuk analisa getaran bebas, nilai gaya luar $\{F\}$ dianggap nol, sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$[M]\{\ddot{D}(t)\} + [K]\{D(t)\} = 0 \quad (17)$$

Gerakan sebuah struktur dengan frekwensi getar alami ω dapat dinyatakan sebagai

$$\{D(t)\} = \{D_0\} \sin(\omega t + \varphi) \quad (18)$$

Memasukkan hasil turunan kedua persamaan (18) kedalam persamaan (17) mengubah persamaan tersebut menjadi sebuah permasalahan eigen, yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$([K] - \omega^2 [M])\{D_0\} = \{0\} \quad (19)$$

Penyelesaian dari persamaan eigen di atas menghasilkan nilai-nilai eigen ω^2 dan vektor-vektor eigen $\{D_0\}$, dimana ω^2 adalah kuadrat dari frekwensi getar alami struktur, dan $\{D_0\}$ adalah bentuk ragam (*mode shape*) getaran.

5. METODE ELIMINASI SHEAR LOCKING

Dalam penelitian ini eliminasi *shear locking* dilakukan dengan 2 cara yaitu metode *Discrete Shear Gap* dan *Modified Field Matching*. Masing-masing metode tersebut akan dijelaskan pada bagian ini.

1. Metode *Discrete Shear Gap* (DSG)

Dalam metode ini, perumusan regangan geser diformulasikan sepanjang elemen, dan hasil dari regangan geser diskrit pada setiap titik nodal diinterpolasi sepanjang *domain* elemen (Bletzinger et al, 1998). Untuk kasus interpolasi bilinear, elemen yang dihasilkan identik dengan MITC (*Mixed Interpolation of Tensorial Components*) yang dikembangkan oleh Bathe dan Dvorkin (1985).

Pada elemen balok Timoshenko, regangan geser dapat diperoleh dengan persamaan (12b). Deformasi geser adalah integrasi dari regangan geser, dan persamaannya dapat diperoleh dari integrasi persamaan (12b). Persamaan deformasi geser dapat ditulis menjadi:

$$\Delta w_\gamma(x) = \int_{x_0}^x \gamma dx = \int_{x_0}^x \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) dx \quad (20)$$

Dimana $\Delta w_\gamma(x)$ adalah perbedaan perpindahan geser yang dapat pula disebut sebagai *shear gap* yang merupakan perbedaan dari perubahan perpindahan total Δw dan perubahan perpindahan lentur murni Δw_b . *Shear gap* pada titik nodal ke $-i$ ($\Delta w_{\gamma i}$) dapat didapatkan dengan mengintegrasikan regangan geser diskrit dari titik nodal pertama hingga titik nodal ke $-i$, sehingga persamaan (20) dapat diubah menjadi:

$$\Delta w_{\gamma i}(x_i) = \int_{x_0}^{x_i} \gamma_h dx = w_h|_{x_0}^{x_i} - \int_{x_0}^{x_i} \theta_h dx \quad (21)$$

Shear Gap dapat diinterpolasi pada balok dengan *shear gap* pada setiap titik nodal balok, sehingga dapat pula ditulis sebagai berikut:

$$\Delta w_\gamma = \sum_{i=1}^n N_i \Delta w_{\gamma i} \quad (22)$$

Regangan geser dapat diperoleh dari turunan persamaan (33), dapat ditulis sebagai berikut:

$$\gamma_h = \gamma_{DSG} = \sum_{i=1}^n \frac{dN_i}{dx} \Delta w_{\gamma i} \quad (23)$$

2. Metode *Modified Field Matching* (MFM)

Metode ini merupakan modifikasi dari metode *Field Matching* yang menurut Wong (2009), metode ini menghasilkan nilai perpindahan yang keliru. Metode ini juga perlu dimodifikasi karena nilai *shape function* yang dihasilkan oleh metode ini tidak memiliki sifat delta Kronecker. Dalam metode ini, *shape function* untuk rotasi tidak diperoleh melalui MEH-K standar, namun melalui persamaan berikut:

$$[N_\theta] = [x]^T \frac{\partial}{\partial x} [N_w] \quad (24)$$

Dimana $[x] = \{x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n\}$ adalah koordinat semua titik nodal dalam DOI.

6. HASIL PERHITUNGAN NUMERIK

Dalam penelitian ini, dilakukan analisa statik, getaran bebas, dan stabilitas. Hasil analisa perhitungan tersebut akan dijelaskan secara singkat pada bagian ini.

1. Pengujian Metode Eliminasi *Shear Locking*

Pengujian dilakukan pada balok yang diberi beban terbagi rata $q=1$ kN/m dengan perletakan jepit-jepit yang dibagi menjadi 8 elemen. Balok yang digunakan memiliki nilai $E=2000$ kN/m², $L=10$ m, $b=2$, $\nu=0.3$, dan nilai L/h yang bervariasi dari 1 hingga 10^4 . Hasil yang akan dianalisa adalah perpindahan pada tengah bentang yang akan dibandingkan dengan solusi eksak balok Euler-Bernoulli, yaitu:

$$w_t = \frac{q L^4}{384 E I} \quad (25)$$

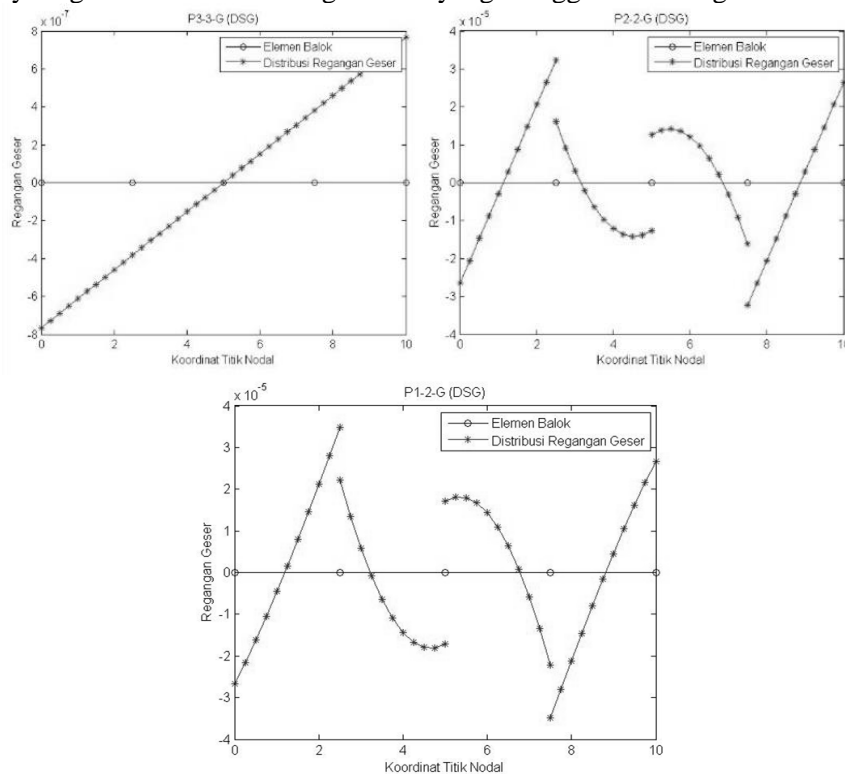
Hasil perhitungan dengan fungsi korelasi *Gaussian* dapat dilihat pada **Tabel 1**.

Tabel 1. *Shear Locking* pada Elemen Balok Langsing dengan Fungsi Korelasi *Gaussian*

L/h	w_t	w_{tengah}/w_t							
		P1-2-G (DSG)	P2-2-G (DSG)	P3-3-G (DSG)	P3-3-G (MFM)	P1-2-QS (DSG)	P2-2-QS (DSG)	P3-3-QS (DSG)	P3-3-QS (MFM)
1	7.81E-05	13.23602	13.24244	13.2402	17.2106	13.20428	13.24144	13.24084	17.1019
5	9.80E-03	1.49226	1.49203	1.48980	5.46028	1.488369	1.491018	1.49044	5.35154
10	0.0781	1.12526	1.12482	1.12259	5.09308	1.121917	1.123753	1.12324	4.98434
10^2	78.125	1.00525	1.00462	1.00125	4.97191	0.959807	0.994598	1.00208	4.86316
10^3	78125	1.01021	0.95671	1.00098	4.97070	0.205938	0.540483	1.00140	4.86195
10^4	78125000	0.67178	0.14190	1.00127	4.97069	0.002653	0.011477	1.00147	4.86194

Dari **Tabel 1** terlihat bahwa penggunaan metode MFM menghasilkan nilai yang keliru. Pada balok yang sangat tipis ($L/h=10^3$ dan 10^4) solusi yang diberikan oleh MEH-K dengan DSG dengan fungsi basis *linear* (P1) dan *quadratic* (P2) menunjukkan bahwa masih terjadi *shear locking* pada balok tersebut. Hal ini disebabkan karena distribusi *shear strain*-nya yang tidak baik dan terjadinya diskontinuitas antar

elemen. Penggunaan fungsi basis *cubic* menunjukkan hasil yang sangat baik dalam mengeliminasi *shear locking*, dan menghasilkan *shear strain* yang sama dengan penyebaran gaya geser semestinya, serta bersifat kontinu. Distribusi *shear strain* dapat dilihat pada **Gambar 2**. Maka untuk penelitian selanjutnya hanya digunakan MEH-K dengan DSG yang menggunakan fungsi basis *cubic*.



Gambar 2. Distribusi Regangan Geser dengan Berbagai Fungsi Basis (Linear, Quadratic, dan Cubic)

2. Pengujian Konvergensi Perpindahan, Gaya Momen, dan Gaya Geser

Dalam bagian ini dilakukan analisa konvergensi terhadap balok dengan $E=1000 \text{ kN/m}^2$, $L=4 \text{ m}$, $b=2 \text{ m}$, $h=0.5 \text{ m}$, $\nu=0.3$, yang memiliki perletakan jepit bebas dan diberi beban segitiga dengan $q = 1 \text{ kN/m}$. Hasilnya akan dibandingkan dengan solusi eksak dan hasil yang diperoleh Fried & Kosmatka (1993). Adapun Solusi eksak dapat dilihat pada Friedman & Kosmatka (1993). Hasil analisa ditunjukkan dalam **Tabel 2**. Dari tabel tersebut ditunjukkan bahwa hasil analisa MEH-K dengan DSG yang menggunakan fungsi basis *cubic* menunjukkan hasil yang sangat dekat dengan solusi eksaknya.

Tabel 2. Hasil Konvergensi Perpindahan, Momen Lentur, dan Gaya Geser

Jumlah Elemen	w/w_t			M/M_t			Q/Q_t		
	P3-3-G (DSG)	P3-3-QS (DSG)	F&K	P3-3-G (DSG)	P3-3-QS (DSG)	F&K	P3-3-QS (DSG)	P3-3-QS (MFM)	F&K
4	0.99991470	0.99989361	1	1.00320	0.999723	1	1.05197	1.03397	1
8	0.9999950	0.99999335	1	1.00315	1.00190	1	1.00415	1.00210	1
16	0.9999971	0.9999958	1	1.00116	1.000743	1	1.00053	1.00021	1

3. Konvergensi Frekwensi Getar Alami

Dalam bagian ini akan dilakukan analisa getaran bebas terhadap balok yang memiliki perletakan sendi-sendi dengan $L=10 \text{ m}$, $b=1 \text{ m}$, $E=2 \times 10^9 \text{ kg/m}^2$, $\nu=0.3$, $\rho=10 \text{ kg/m}^3$. Balok yang dianalisa memiliki dua jenis ketebalan h/L yaitu 0.2 dan 0.001. Hasil analisa akan dinyatakan dalam frekwensi tak berdimensi λ yang didapatkan dari persamaan:

$$\lambda = \sqrt{\omega L^2 \sqrt{\frac{m}{EI}}} \quad (26)$$

Dimana m adalah massa per satuan panjang, dan ω adalah frekwensi getar alami balok tersebut. Untuk balok tebal ($h/L=0.2$) nilai frekwensinya akan dibandingkan dengan hasil yang didapatkan dengan metode *pseudospectral* (Lee, 2004), sedangkan untuk nilai $h/L = 0.001$ (balok tipis), nilai frekwensinya akan dibandingkan dengan solusi eksak untuk teori balok Euler-Bernoulli yang didapatkan dari tesis Wicaksana (2006). Penelitian ini dibatasi hingga 15 ragam getar pertama saja. Hasil perhitungan dapat dilihat pada **Tabel 3**. Terlihat bahwa frekwensi yang dihasilkan untuk balok tebal sudah mendekati solusi eksak dan konvergen, sedangkan untuk balok tipis, dibutuhkan minimal pembagian balok sebanyak 32 elemen agar hasilnya dapat mendekati solusi eksaknya.

Tabel 3. Hasil Frekwensi Tak Berdimensi Balok P3-3-G (DSG)

Mode	$\lambda/\lambda_{pseudospectral} (h/L=0.2)$				$\lambda/\lambda_{Euler-Bernoulli} (h/L=0.001)$			
	4 elemen	8 elemen	16 elemen	32 elemen	4 elemen	8 elemen	16 elemen	32 elemen
1	0.99938	1.00040	1.00042	1.00042	0.99879	1.00008	1.00000	1.00000
2	1.00345	1.00084	1.00121	1.00123	1.12739	1.00525	1.00000	1.00000
3	1.14691	1.00175	1.00190	1.00195	1.36452	1.15455	0.99997	0.99999
4	1.35608	1.00786	1.00244	1.00252	86.36038	1.27586	1.00032	0.99997
5	1.20532	1.02471	1.00301	1.00296	144.96488	1.70270	1.00691	0.99995
6	1.16953	1.03916	1.00389	1.00329	138.95019	3.10406	1.04435	0.99992
7	1.24954	1.01691	1.00487	1.00487	119.31155	5.76896	1.14373	0.99988
8	1.26218	1.00447	1.00444	1.00444	106.58245	54.80652	1.26565	0.99990
9	-	1.04745	1.00548	1.00355	-	60.21909	1.42211	1.00017
10	-	1.03628	1.00365	1.00363	-	75.65371	1.72123	1.00115
11	-	1.05220	1.00810	1.00378	-	74.61816	2.20012	1.00371
12	-	1.08879	1.00298	1.00291	-	69.47509	2.84458	1.00937
13	-	1.14600	1.01197	1.00399	-	64.13294	3.66771	1.02075
14	-	1.17165	1.00244	1.00235	-	59.55263	4.69999	1.04175
15	-	1.36322	1.01706	1.00420	-	56.04193	5.86829	1.07687

4. Konvergensi Gaya Tekan Kritis (P_{cr})

Pengujian akan dilakukan terhadap balok yang memiliki perletakan jepit-jepit dengan $L=10$ m, $b=1$ m, $E= 2 \times 10^9$ kg/m², $\nu= 0.3$, dan nilai L/h yang bervariasi dari 1 sampai 10^4 . Dalam bagian ini, juga akan dilakukan penelitian terhadap MEH-K tanpa DSG. Menurut Kosmatka (1995), solusi eksaknya P_{cr} untuk balok Timoshenko dinyatakan sebagai berikut:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{eff}^2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EI}{L_{eff}^2 kGA}} \right\} \quad (27)$$

Dimana L_{eff} adalah panjang efektif balok. Hasil perhitungan dapat dilihat pada **Tabel 4**. Berdasarkan tabel tersebut terlihat tanpa DSG, P_{cr} untuk balok tipis ($L/h \geq 10^2$) jauh dari solusi eksaknya.

Tabel 4. Hasil Gaya Tekan Kritis (P_{cr}) Balok P3-3-G dan P3-3-G (DSG)

Jumlah Elemen	P_{cr} / P_{cr} eksak (P3-3-G)				P_{cr} / P_{cr} eksak (P3-3-G (DSG))			
	L/h				L/h			
	10	10^2	10^3	10^4	10	10^2	10^3	10^4
4	1.2825780	23.67538	2262.358	226130.6	1.1355546	1.151089	1.151263	1.151265
8	1.00229249	1.019572	1.86067	85.8057	0.997662	1.002507	1.056164	1.068828
16	1.00004482	1.00114	1.01068	1.51118	0.999754	0.999742	0.999943	1.00256
32	1.00000046	1.000024	1.0004	1.01567	0.9999884	0.999987	0.999988	0.999998

7. KESIMPULAN

Perhitungan numerik MEH-K dengan DSG dalam analisis statis, dinamik getaran bebas, dan stabilitas menghasilkan hasil yang sangat baik dan bebas dari fenomena *shear locking*, namun dalam penggunaannya memerlukan penggunaan fungsi basis polinomial minimal berderajat 3. Adanya penyebaran distribusi *shear strain* yang tidak baik dan diskontinuitas antar elemen menyebabkan gagalnya MEH-K dengan DSG. Untuk kedepannya diperlukan penelitian lebih lanjut mengenai penggunaan metode DSG dalam pelat dan cangkang (*plates and shells*) Reissner-Mindlin berbasis Kriging, dan metode *smoothing* untuk memperbaiki distribusi *shear strain* yang dihasilkan MEH-K dengan DSG yang menggunakan fungsi basis polinomial dengan derajat kurang dari 3.

8. DAFTAR REFERENSI

- Bathe, K.J., And Dvorkin, E.N. (1985). "A Four Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Theory and a Mixed Interpolation", *International Journal For Numerical Methods in Engineering* (1985): 367-383.
- Blitzinger, K.U., Bischoff, & M., Ramm, E. (1998). "A Unified Approach for Shear-Locking-Free Triangular and Rectangular Shell Finite Elements", *Computational Mechanics* (1998): 1-22.
- Cook, R.D., Malkus, D.S. & Plesha, M.E. (1989). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York.
- Friedman, Z. & Kosmatka, J.B. (1993). An Improved Two-node Timoshenko Beam Finite Element. *Computers & Structures*. 47(3), 473-481.
- Gu, L. (2003). Moving Kriging Interpolation and Element-free Galerkin Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56, 1-11.
- Kosmatka, J.B. (1995). An improved Two-node Finite Element for Stability and Natural Frequencies of Axial-loaded Timoshenko Beams. *Computers & Structures*. 57(1), 141-149.
- Lee, J. & Schultz, W.W. (2004). Eigenvalue Analysis of Timoshenko Beams and Axisymmetric Mindlin Plates by the Pseudospectral Method. *Journal of Sound and Vibration*. 269, 609-621.
- Olea, R.A. (1999). *Geostatistics for Engineers and Earth Scientists*, Kluwer Academic, Boston.
- Reddy, J. N. (2006). *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, Singapore.
- Syamsoeyadi, H. (2009). *Pengembangan Elemen Balok Timoshenko Berbasis Kriging untuk Analisis Statik dan Getaran Bebas*. Unpublished undergraduate thesis, Universitas Kristen Petra, Surabaya.
- Tongsuk, P. & Kanok-Nukulchai, W. (2004, September). Further Investigation of Element-Free Galerkin Method using Moving Kriging Interpolation. *International Journal of Computational Methods*, 1(2), 345-365.
- Wicaksana, C. (2006, May). *Dynamic analysis using Kriging-Based finite element methods* (No. ST-06-15). Unpublished master thesis, Asian Institute of Technology, Bangkok.
- Wong, F. T. And Kanok-Nukulchai, W., "On Alleviation of Shear Locking in the Kriging-based Finite Element Method". International Civil Engineering Conference "Towards Sustainable Civil Engineering Practice", Surabaya, Indonesia, August 25-26 (2006): 39-47.
- Wong, F.T. (2007). A personal unpublished note.
- Wong, F.T. (2009). *Kriging-Based Finite Element Method for Analyses of Plate and Shells*. Unpublished doctoral dissertation. Asian Institute of Technology. Bangkok.