

STUDI ELEMEN-ELEMEN LINEAR, KUADRATIK, DAN KUBIK UNTUK ANALISIS STATIK, GETARAN BEBAS, DAN TEKUK BALOK TIMOSHENKO NON-PRISMATIK

Timothy Adriel Setiabudi¹ dan Wong Foek Tjong²

ABSTRAK : Metode elemen hingga sudah banyak digunakan di masa sekarang. Akan tetapi, masalah *shear locking* adalah masalah yang hingga saat ini masih diteliti sehingga banyak metode pendekatan dalam menemukan solusinya. Pada penelitian ini digunakan teori balok Timoshenko dan metode eliminasi *shear locking least square smoothed assumed strain concept*. Penelitian ini menguji efektivitas penggunaan metode eliminasi *shear locking* pada balok non-prismatik dengan elemen linear, kuadrat, dan kubik. Terbukti bahwa metode LSSASC yang digunakan pada elemen-elemen linear, kuadrat, dan kubik dapat mengeliminasi peristiwa *shear locking* pada elemen linear, kuadrat, dan kubik balok Timoshenko non-prismatik untuk analisis statik, tekuk, dan getaran bebas.

KATA KUNCI: metode elemen hingga, *shear locking*, *least square smoothed assumed strain*, balok Timoshenko, *tapered beam*, balok non-prismatik, analisis statik, tekuk, getaran bebas

1. PENDAHULUAN

Metode Elemen Hingga (MEH) adalah metode numerik yang merupakan salah satu metode yang banyak digunakan untuk perhitungan struktur. Pada analisis MEH, dibutuhkan akurasi dalam mendapatkan hasil analisisnya. Penggunaan MEH orde tingkat tinggi bisa menyelesaikan analisis dengan efisien dan akurat. Pada penelitian ini digunakan cara *hp-adaptive finite elements* (mengubah jumlah elemen dan derajat polinomial) untuk mendapatkan hasil yang paling akurat (Mitchell, 2015) dengan tingkat derajat linear, kuadrat, dan kubik. Untuk penelitian ini, akan digunakan balok timoshenko non-prismatik. Balok non-prismatik kasus paling umum yang sering ditemui, yaitu balok dengan garis tengah lengkung dan luas penampang yang tidak konstan (Balduzzi et al., 2016). Pada perhitungan elemen balok timoshenko terdapat peristiwa *shear locking*. *Shear locking* merupakan kesalahan yang terjadi dalam meh karena sifat linier elemen segi empat. Untuk mengurangi atau mengeliminasi peristiwa *shear locking*, digunakan metode eliminasi *shear locking* yaitu *least-square smoothed assumed strain concept* (LSSASC) pada penelitian ini. Peristiwa *shear locking* pada penelitian ini sudah tereliminasi dengan baik pada analisis statik dan analisis tekuk. Untuk analisis getaran bebas, efektivitas metode LSSASC perlu disempurnakan lagi untuk mendapatkan hasil yang lebih konvergen.

2. PERSAMAAN GERAK BALOK TIMOSHENKO

Pada balok Timoshenko terdapat nilai regangan geser. Pada teori balok Timoshenko, diasumsikan rotasi pada bidang datar tidak tegak lurus terhadap garis netral seperti teori balok Euler-Bernoulli (Reddy, 2006). Oleh karena itu terdapat regangan geser dan inersia rotasi pada teori balok Timoshenko. Akibatnya balok akan melendut dan menciptakan perpindahan (w) dan rotasi (θ). Pada teori balok Timoshenko, kita meninjau perpindahan hanya untuk arah x (θ) dan z (w) yang dapat ditulis sebagai berikut:

¹ Mahasiswa Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, timothyadriel11@gmail.com

² Dosen Program Studi Teknik Sipil Universitas Kristen Petra Surabaya, wftjong@petra.ac.id

$$u = -z\theta(x,t) \quad (1a)$$

$$w = w(x,t) \quad (1b)$$

Dimana u adalah perpindahan aksial yang sejajar arah balok, w adalah perpindahan lateral yang tegak lurus arah balok, dan θ adalah rotasi penampang balok. Komponen regangan yang tidak nol ditentukan berdasarkan menurunkan persamaan (2a) dan (2b) sebagai berikut:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = -z \frac{\partial \theta}{\partial x} = -z\theta_{,x} \quad (2a)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta = w_{,x} - \theta \quad (2b)$$

Dimana ε_{xx} adalah regangan akibat momen lentur dan γ_{xz} adalah regangan akibat gaya geser. Tanda koma berarti turunan parsial pertama terhadap variabel disebelahnya. Persamaan gerak untuk balok Timoshenko dapat diturunkan dari prinsip Hamilton yang akan mendapatkan persamaan bentuk lemah (*weak form*) sebagai berikut:

$$\int_0^L \delta \theta_{,x} EI \theta_{,x} dx + \int_0^L (\delta w_{,x} - \delta \theta) kGA (w_{,x} - \theta) dx + P \int_0^L w_{,x} \delta w_{,x} dx + \int_0^L \delta w \rho A \ddot{w} dx + \int_0^L \delta \theta \rho I \ddot{\theta} dx = \int_0^L \delta w q dx + \int_0^L \delta \theta m dx \quad (3)$$

Gaya geser (*shear force*) dan momen lentur (*bending moment*) dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$Q = kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) + P \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (4a)$$

$$M = EI \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (4b)$$

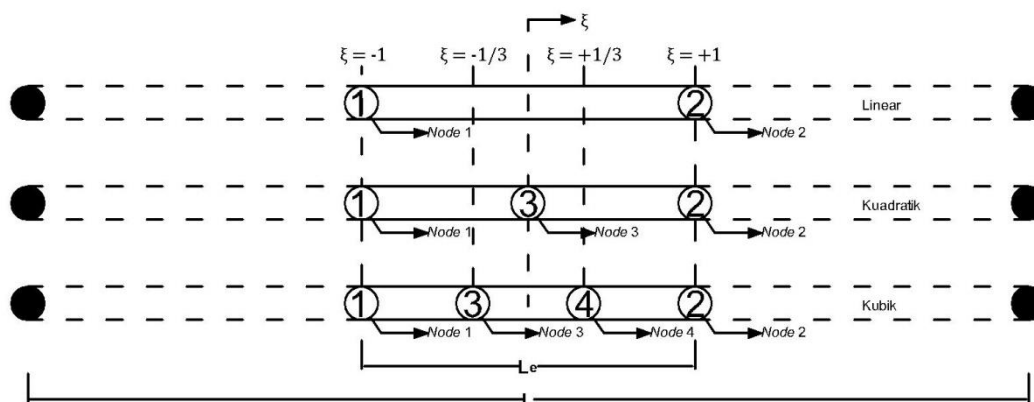
3. PERUMUSAN BALOK TIMOSHENKO

Balok Timoshenko akan dibagi menjadi banyak elemen yang apabila ditinjau pada salah satu elemennya, terdapat fungsi perpindahan yang dapat ditulis seperti dibawah ini:

$$w = [N_w(x)] \{d\} \quad (5)$$

$$\theta = [N_\theta(x)] \{d\} \quad (6)$$

dimana $N_w = [N_1 \ 0 \ N_2 \ 0 \ \dots \ N_n \ 0]$ dan $N_\theta = [0 \ N_1 \ 0 \ N_2 \ \dots \ 0 \ N_n]$ yang masing-masing adalah *shape function* yang menghubungkan perpindahan titik nodal elemen (w dan θ) dengan perpindahan titik nodal struktur $d = \{w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2 \ \dots \ w_n \ \theta_n\}^T$, n adalah jumlah *node* dalam elemen balok. Elemen-elemen balok Timoshenko yang akan digunakan pada penelitian ini adalah elemen linear, kuadratik, dan kubik. Adapun *shape function* (N_1, N_2, \dots, N_n) yang digunakan dapat dilihat pada **Gambar 2** dan **Tabel 1**.



Gambar 1. Elemen dengan interpolasi linear, kuadratik, dan kubik

Tabel 1. Shape Function untuk Elemen Linear (2 node), Kuadrat (3 node), dan Kubik (4 node).

	Linear	Node 3 digunakan	Node 3 dan 4 digunakan
N_1	$\frac{1}{2}(1 - \xi)$	$-\frac{1}{2}(1 - \xi^2)$	$+\frac{1}{16}(-9\xi^3 + \xi^2 + 9\xi - 1)$
N_2	$\frac{1}{2}(1 + \xi)$	$-\frac{1}{2}(1 - \xi^2)$	$+\frac{1}{16}(9\xi^3 + \xi^2 - 9\xi - 1)$
N_3	$(1 - \xi^2)$		$+\frac{1}{16}(27\xi^3 + 7\xi^2 - 27\xi - 7)$
N_4	$\frac{1}{16}(-27\xi^3 - 9\xi^2 + 27\xi + 9)$		

Sumber: Bathe, (1996) yang dikutip oleh Sugianto (2016)

Rotasi virtual ditunjukkan oleh persamaan (2.8) sebagai berikut:

$$\delta\theta = [\mathbf{N}_\theta] \{\delta\mathbf{d}\} \quad (7)$$

Kemudian terdapat turunan rotasi terhadap x yang dapat dilihat pada persamaan berikut:

$$\theta_{,x} = \frac{d\theta}{dx} = [J]^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{dN_i}{d\xi} \theta_i = [\mathbf{B}_\theta] \{\mathbf{d}\} \quad (8)$$

di mana \mathbf{B}_θ merupakan matriks perpindahan-regangan terhadap rotasi, yang dapat dilihat pada persamaan (2.10) sebagai berikut:

$$[\mathbf{B}_\theta] = [J]^{-1} [0 \quad N_{1,\xi} \quad 0 \quad N_{2,\xi} \quad \dots \quad 0 \quad N_{n,\xi}] \quad (9)$$

Setelah itu didapatkan keadaan virtual untuk turunan rotasi terhadap x dari persamaan (8), yang ditunjukkan oleh persamaan (2.15) sebagai berikut:

$$\delta\theta_{,x} = [\mathbf{B}_\theta] \{\delta\mathbf{d}\} \quad (10)$$

Perpindahan virtual ditunjukkan oleh persamaan (11) sebagai berikut:

$$\delta w = [\mathbf{N}_w] \{\delta\mathbf{d}\} \quad (11)$$

Kemudian terdapat turunan perpindahan terhadap x yang dapat dilihat pada persamaan berikut:

$$w_{,x} = \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = [J]^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{dN_i}{d\xi} w_i = [\mathbf{B}_w] \{\mathbf{d}\} \quad (12)$$

dimana \mathbf{B}_w merupakan matriks perpindahan-regangan terhadap perpindahan, yang dapat dilihat pada persamaan (13) sebagai berikut:

$$[\mathbf{B}_w] = [J]^{-1} [N_{1,\xi} \quad 0 \quad N_{2,\xi} \quad 0 \quad \dots \quad N_{n,\xi} \quad 0] \quad (13)$$

Persamaan gerak untuk elemen balok Timoshenko adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{d}}(t) + [\mathbf{k} + P \mathbf{k}_g] \mathbf{d}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (10)$$

Masing-masing matriks $[k]$ dan $\{f\}$ tersebut dinyatakan dalam persamaan:

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^1 ([\mathbf{B}_\theta])^T E I(\xi) ([\mathbf{B}_\theta]) [J] d\xi + \int_{-1}^1 ([\mathbf{B}_w] - [\mathbf{N}_\theta])^T G A_s(\xi) ([\mathbf{B}_w] - [\mathbf{N}_\theta]) [J] d\xi \quad (11a)$$

$$\mathbf{f} = \int_{-1}^1 ([\mathbf{N}_w])^T q [J] d\xi + \int_{-1}^1 ([\mathbf{N}_\theta])^T m [J] d\xi \quad (11b)$$

$$\mathbf{m} = \int_{-1}^1 ([\mathbf{N}_w])^T \rho A(\xi) [\mathbf{N}_w] [J] d\xi + \int_{-1}^1 ([\mathbf{N}_\theta])^T \rho I(\xi) [\mathbf{N}_\theta] [J] d\xi \quad (11c)$$

$$\mathbf{k}_g = \int_{-1}^1 [\mathbf{B}_w] ([\mathbf{B}_w])^T [J] d\xi \quad (11d)$$

Pada perhitungan secara struktur, elemen-elemen pada balok perlu dirakit (*assembly*) menjadi satu sistem stuktur sehingga persamaan (2.31) menjadi:

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{D}}(t) + [\mathbf{K} + P \mathbf{K}_g]\mathbf{D}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (12)$$

Untuk analisis getaran bebas, gaya luar dapat dianggap nol sehingga persamaan di atas dapat ditulis menjadi :

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{D}}(t) + [\mathbf{K}]\mathbf{D}(t) = \mathbf{0} \quad (13)$$

Sedangkan untuk analisa statis dan analisa tekuk, percepatan struktur dianggap nol, sehingga persamaannya menjadi :

$$[\mathbf{K} + P \mathbf{K}_g] \mathbf{D}(t) = \mathbf{F} \quad (14)$$

Untuk analisis statis, gaya aksial yang terjadi pada balok dianggap nol, sehingga menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$[\mathbf{K}] \mathbf{D}(t) = \mathbf{F} \quad (15)$$

Lalu untuk mencari gaya aksial kritis yang membuat terjadinya tekuk pada balok (P_{cr}), dianggap gaya luar yang bekerja pada balok sama dengan nol, sehingga terbentuk persamaan *eigen* sebagai berikut:

$$[\mathbf{K} + P \mathbf{K}_g] \mathbf{D}(t) = \mathbf{0} \quad (16)$$

Dimana nilai P_{cr} didapatkan dari nilai *eigen value* positif terkecil, dan nilai *eigen vector* yang bersangkutan adalah perpindahan balok setelah berdeformasi akibat tekuk. Untuk analisa getaran bebas, gaya luar yang bekerja pada balok dianggap nol, sehingga persamaannya dapat ditulis sebagai berikut:

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{D}}(t) + [\mathbf{K}]\mathbf{D}(t) = \mathbf{0} \quad (17)$$

Gerakan sebuah struktur dengan frekuensi getar alami ω dapat dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{D}_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (18)$$

Apabila persamaan (2.34) diturunkan terhadap waktu sebanyak dua kali, akan menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$\ddot{\mathbf{D}}(t) = -\omega^2 \mathbf{D}_0 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \mathbf{D}(t) \quad (19)$$

Substitusi dari persamaan (2.39b) ke persamaan (2.38) dapat dituliskan menjadi:

$$-\omega^2 [\mathbf{M}]\mathbf{D}_0 \sin(\omega t + \varphi) + [\mathbf{K}]\mathbf{D}_0 \sin(\omega t + \varphi) = \mathbf{0} \quad (20)$$

Persamaan (2.34c) adalah persamaan gerak untuk menganalisa getaran bebas pada suatu struktur dengan banyak derajat kebebasan tanpa redaman (*undamped multi degree of freedom system*). Apabila diasumsikan nilai $\sin(\omega t + \varphi) \neq 0$, dan persamaan diatas diubah menjadi permasalahan eigen, maka persamaan tersebut menjadi sebagai berikut :

$$([\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}])\mathbf{D}_0 = \mathbf{0} \quad (21)$$

Dimana $\omega^2 = \text{eigen value}$

$\mathbf{D}_0 = \text{eigen vector}$

Penyelesaian dari persamaan eigen di atas menghasilkan nilai-nilai eigen ω^2 dan vektor-vektor eigen \mathbf{D}_0 , dimana ω^2 adalah kuadrat dari frekwensi getar alami struktur, dan \mathbf{D}_0 adalah bentuk ragam (*mode shape*) getaran.

4. METODE LEAST SQUARE SMOOTHED ASSUMED STRAIN CONCEPT

Fenomena dimana elemen balok menjadi sangat kaku dikarenakan ketebalan balok yang sangat tipis atau disebut *shear locking*, merupakan suatu masalah yang sering muncul pada balok Timoshenko. Pada kesempatan ini, teknik yang akan digunakan adalah *least-square smoothed assumed strain concept*. Menurut Wong (2022), penurunan derajat pada matriks *shape function* diperlukan untuk mengeliminasi *shear locking*. Dalam mengisi N_θ , *shape function* yang digunakan berturut-turut harus sesuai dengan Tabel 2.

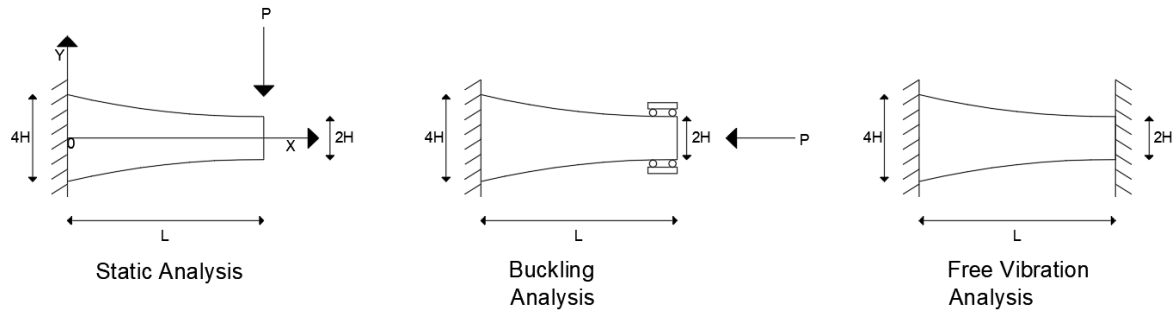
Tabel 2. *Shape Function Least-Square Smoothed Assumed Strain Concept*

	Linear	Node 3 digunakan	Node 3 dan 4 digunakan
\overline{N}_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6} - 0.5 \times \xi$	$-\frac{1}{16} + \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{5} \times -\frac{9}{16}\right) \times \xi + \frac{9}{16} \times \xi^2$
\overline{N}_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6} + 0.5 \times \xi$	$-\frac{1}{16} + \left(-\frac{1}{16} + \frac{3}{5} \times \frac{9}{16}\right) \times \xi + \frac{9}{16} \times \xi^2$
\overline{N}_3		$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{16} + \left(-\frac{27}{16} + \frac{3}{5} \times \frac{27}{16}\right) \times \xi - \frac{9}{16} \times \xi^2$
\overline{N}_4		$\frac{9}{16} + \left(\frac{27}{16} + \frac{3}{5} \times -\frac{27}{16}\right) \times \xi - \frac{9}{16} \times \xi^2$	

Sumber: Henokh, G.T., & Sugiyono, H. (2022). Studi Eliminasi *Shear Locking* Pada Balok Timoshenko Dan Pelat Reissner-Mindlin Dengan *Least Square Smoothed Assumed Strain*. [Skripsi]. Universitas Kristen Petra.

5. HASIL PERHITUNGAN NUMERIK

Pada penelitian ini, dilakukan analisa statik, tekuk, dan getaran bebas terhadap balok non-prismatik yang memiliki bentuk dan perletakan seperti **Gambar 2**.



Gambar 2. Idealisasi Struktur Tiap Analisis

Untuk karakteristik geometrik balok diatas berturut-turut adalah $B= 1$ m, $L= 5$ m, $H= 0.25$ m, dan $P= -100$ kN, dan karakteristik material $E= 10 \times 10^7$ kN/m² dan $\nu= 0.3$. Untuk mencari tinggi di tiap bentang dapat dilihat pada persamaan (22):

$$H(x) = \frac{2H(2L^2 - 2Lx + x^2)}{L^2} \quad (22)$$

Untuk analisa statik, hasil defleksi dari MATLAB akan dibandingkan dengan penelitian oleh Beltempo et al. (2015). Untuk analisa tekuk dan getaran bebas, hasil dari MATLAB akan dibandingkan dengan SAP2000.

Hasil Analisa dapat dilihat pada **Tabel 3** sampai dengan **Tabel 7**.

Tabel 3. Hasil Analisa Defleksi

Jumlah Elemen	error% terhadap Eksak			Rasio		
	Linear	Kuadratik	Kubik	Linear/eksak	Kuadratik/eksak	Kubik/eksak
2	20.60161	0.25720	0.14692	0.79398	0.99743	0.99853
4	6.13498	0.08099	0.07685	0.93865	0.99919	0.99923
8	1.65211	0.07287	0.07256	0.98348	0.99927	0.99927
16	0.47146	0.07232	0.07230	0.99529	0.99928	0.99928

Tabel 4. Hasil Analisa Tekuk

Jumlah Elemen	error% terhadap Eksak			Rasio		
	Linear	Kuadratik	Kubik	Linear/eksak	Kuadratik/eksak	Kubik/eksak
2	117.32900	2.54389	0.55574	2.17329	1.02544	1.00556
4	20.27377	0.39809	0.07289	1.20274	1.00398	1.00073
8	4.78927	0.08489	0.06255	1.04789	1.00085	1.00063
16	1.22450	0.06363	0.06220	1.01224	1.00064	1.00062

Tabel 5. Hasil Analisa Getaran Bebas Elemen Linear

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8
e% 2 el.	148.20483	599.39532	-	-	-	-	-	-
e% 4 el.	19.06886	50.39035	79.53735	182.30254	263.80745	170.59690	-	-
e% 8 el.	3.91965	9.22657	16.15688	24.57859	80.46769	41.07181	36.84671	20.28367
e% 16 el.	0.61136	1.24123	2.25043	3.70996	42.64284	8.22655	11.17637	13.37320
ω/ω eksak 2 el.	2.48205	6.99395	-	-	-	-	-	-
ω/ω eksak 4 el.	1.19069	1.50390	1.79537	2.82303	3.63807	2.70597	-	-
ω/ω eksak 8 el.	1.03920	1.09227	1.16157	1.24579	1.80468	1.41072	1.36847	1.20284
ω/ω eksak 16 el.	1.00611	1.01241	1.02250	1.03710	1.42643	1.08227	1.11176	1.13373

Tabel 6. Hasil Analisa Getaran Bebas Elemen Kuadratik

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8
e% 2 el.	9.00092	20.40498	76.90037	185.03001	155.07697	149.42859	-	-
e% 4 el.	0.00498	1.06915	5.47476	6.36011	21.48113	36.83905	37.21124	27.46160
e% 8 el.	0.42658	1.09889	1.49802	1.46198	0.82157	0.53731	2.45175	1.40336
e% 16 el.	0.45472	1.24486	1.94233	2.47145	2.75231	2.76735	2.56677	2.23202
ω/ω eksak 2 el.	1.09001	1.20405	1.76900	2.85030	2.55077	2.49429	-	-
ω/ω eksak 4 el.	1.00005	1.01069	1.05475	1.06360	1.21481	1.36839	1.37211	1.27462
ω/ω eksak 8 el.	0.99573	0.98901	0.98502	0.98538	0.99178	1.00537	1.02452	1.01403
ω/ω eksak 16 el.	0.99545	0.98755	0.98058	0.97529	0.97248	0.97233	0.97433	0.97768

Tabel 7. Hasil Analisa Getaran Bebas Elemen Kubik

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8
e% 2 el.	0.32062	2.26660	12.21576	19.65476	63.35586	66.89995	68.56420	62.06280
e% 4 el.	0.44938	1.19784	1.72803	1.12085	0.04101	2.80658	7.49800	6.94367
e% 8 el.	0.45642	1.25378	1.96778	2.52324	2.83634	2.88118	2.67962	2.02964
e% 16 el.	0.45661	1.25486	1.97351	2.54437	2.89608	3.02036	2.97641	2.85041
ω/ω eksak 2 el.	0.99679	1.02267	1.12216	1.19655	1.63356	1.66900	1.68564	1.62063
ω/ω eksak 4 el.	0.99551	0.98802	0.98272	0.98879	0.99959	1.02807	1.07498	1.06944
ω/ω eksak 8 el.	0.99544	0.98746	0.98032	0.97477	0.97164	0.97119	0.97320	0.97970
ω/ω eksak 16 el.	0.99543	0.98745	0.98026	0.97456	0.97104	0.96980	0.97024	0.97150

6. KESIMPULAN

Dapat disimpulkan bahwa penggunaan elemen linear, kuadratik, dan kubik menggunakan metode LSSASC pada analisis statik, analisis tekuk, dan analisis getaran bebas balok Timoshenko non-prismatik memberikan hasil yang akurat dan efektif pada elemen kuadratik dan kubik dengan jumlah elemen minimal 8 elemen.

7. DAFTAR REFERENSI

- Balduzzi, G., Aminbaghai, M., Sacco, E., Füssl J., Eberhardsteiner, J., & Auricchio, F. (2016). "Non-prismatic Beams: A Simple and Effective Timoshenko-like Model." *International Journal of Solids and Structures*, 90, 236-250. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.02.017>
- Bathe, K.J. (1996). *Finite Element Procedures*. Prentice Hall.
- Beltempo et al. (2015). "Analytical Derivation of a General 2D Non-prismatic Beam Model Based on The Hellinger–Reissner Principle." *Engineering Structures*. 101, 88-98. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.06.020>
- Henokh, G.T., & Sugiyono, H. (2022). *Studi Eliminasi Shear Locking Pada Balok Timoshenko Dan Pelat Reissner-Mindlin Dengan Least Square Smoothed Assumed Strain*. [Skripsi]. Universitas Kristen Petra.
- Mitchell, W. F. (2015). "How High a Degree is High Enough for High Order Finite Elements?" *Procedia Computer Science*, 15, 246-255. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.05.235>
- Reddy, J. N. (2006). *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, Singapore.
- Sugianto, S. (2016). *Studi Teknik Discrete Shear Gap pada Elemen Balok Timoshenko dan Elemen Pelat Reissner-Mindlin*. (TA No. 11012086/SIP/2016). [Skripsi]. Universitas Kristen Petra, Surabaya.
- Wong, F. T. (2022). A personal unpublished note.